

# Table des matières

<b>Introduction</b> . . . . .	11
<b>Familiarisation avec les espaces semi-normés</b> . . . . .	15
<b>Chapitre 1. Prérequis</b> . . . . .	17
1.1. Ensembles, applications, relations d'ordre . . . . .	17
1.2. Dénombrabilité . . . . .	19
1.3. Construction de $\mathbb{R}$ . . . . .	20
1.4. Propriétés de $\mathbb{R}$ . . . . .	21
<b>Partie 1. Espaces semi-normés</b> . . . . .	25
<b>Chapitre 2. Espaces semi-normés</b> . . . . .	27
2.1. Définition des espaces semi-normés . . . . .	27
2.2. Suites convergentes . . . . .	31
2.3. Bornés, ouverts, fermés . . . . .	33
2.4. Intérieur, fermeture, boules, semi-boules . . . . .	37
2.5. Densité, séparabilité . . . . .	39
2.6. Compacts . . . . .	41
2.7. Parties connexes, convexes . . . . .	46
<b>Chapitre 3. Comparaison d'espaces semi-normés</b> . . . . .	51
3.1. Familles équivalentes de semi-normes . . . . .	51
3.2. Égalités et inclusions topologiques . . . . .	53
3.3. Sous-espaces topologiques . . . . .	57
3.4. Familles filtrantes de semi-normes . . . . .	62
3.5. Somme d'ensembles . . . . .	64
<b>Chapitre 4. Espaces de Banach, Fréchet et Neumann</b> . . . . .	67
4.1. Espaces métrisables . . . . .	67
4.2. Propriétés des ensembles d'un espace métrisable . . . . .	69

4.3. Espaces de Banach, Fréchet, Neumann . . . . .	73
4.4. Compacts d'un espace de Fréchet . . . . .	75
4.5. Propriétés de $\mathbb{R}$ . . . . .	76
4.6. Séries convergentes . . . . .	79
4.7. Complété séquentiel d'un espace semi-normé . . . . .	81
<b>Chapitre 5. Espaces de Hilbert . . . . .</b>	<b>83</b>
5.1. Espaces de Hilbert . . . . .	83
5.2. Projection dans un espace de Hilbert . . . . .	86
5.3. Espace $\mathbb{R}^d$ . . . . .	89
<b>Chapitre 6. Produit, intersection, somme et quotient d'espaces . . . . .</b>	<b>93</b>
6.1. Produit d'espaces semi-normés . . . . .	93
6.2. Produit d'un espace semi-normé par lui-même . . . . .	98
6.3. Intersection d'espaces semi-normés . . . . .	100
6.4. Somme d'espaces semi-normés . . . . .	104
6.5. Somme directe d'espaces semi-normés . . . . .	110
6.6. Espace quotient . . . . .	114
<b>Partie 2. Applications continues . . . . .</b>	<b>117</b>
<b>Chapitre 7. Applications continues . . . . .</b>	<b>119</b>
7.1. Applications continues . . . . .	119
7.2. Continuité et changement de topologie ou restriction . . . . .	122
7.3. Composition d'applications continues . . . . .	124
7.4. Semi-normes continues . . . . .	125
7.5. Applications linéaires continues . . . . .	126
7.6. Applications multilinéaires continues . . . . .	130
7.7. Quelques applications continues . . . . .	133
<b>Chapitre 8. Images d'ensembles par une application continue . . . . .</b>	<b>137</b>
8.1. Images d'ensembles ouverts, fermés . . . . .	137
8.2. Images d'ensembles denses, séparables, connexes . . . . .	139
8.3. Images d'ensembles compacts . . . . .	141
8.4. Images par une application linéaire continue . . . . .	143
8.5. Applications continues dans un compact . . . . .	145
8.6. Applications réelles continues . . . . .	146
8.7. Applications compactantes . . . . .	148
<b>Chapitre 9. Propriétés d'applications dans des espaces métrisables . . . . .</b>	<b>151</b>
9.1. Applications continues dans un espace métrisable . . . . .	151

9.2. Théorème de point fixe de Banach . . . . .	155
9.3. Théorème de Baire . . . . .	156
9.4. Théorème de l'application ouverte . . . . .	158
9.5. Théorème de continuité de Banach–Schauder . . . . .	160
9.6. Théorème du graphe fermé . . . . .	161
<b>Chapitre 10. Prolongement, équicontinuité . . . . .</b>	<b>163</b>
10.1. Extension d'une égalité par continuité . . . . .	163
10.2. Prolongement continu d'une application . . . . .	164
10.3. Familles équicontinues d'applications . . . . .	168
10.4. Théorème d'équicontinuité de Banach–Steinhaus . . . . .	171
<b>Chapitre 11. Compacité dans des espaces d'applications . . . . .</b>	<b>177</b>
11.1. Espaces $\mathcal{F}(X; F)$ et $\mathcal{C}(X; F)$ -simple . . . . .	177
11.2. Lemme de Zorn . . . . .	178
11.3. Compacité de familles d'applications . . . . .	181
11.4. Un théorème de compacité d'Ascoli . . . . .	185
<b>Chapitre 12. Espaces d'applications linéaires ou multilinéaires . . . . .</b>	<b>187</b>
12.1. Espace $\mathcal{L}(E; F)$ . . . . .	187
12.2. Bornés de $\mathcal{L}(E; F)$ . . . . .	190
12.3. Complétion séquentielle de $\mathcal{L}(E; F)$ lorsque $E$ est métrisable . . . . .	191
12.4. Semi-normes et norme sur $\mathcal{L}(E; F)$ lorsque $E$ est normé . . . . .	193
12.5. Continuité de la composition des applications linéaires . . . . .	195
12.6. Inversibilité au voisinage d'un isomorphisme . . . . .	199
12.7. Espace $\mathcal{L}^d(E_1 \times \cdots \times E_d; F)$ . . . . .	202
12.8. Séparation des variables d'une application multilinéaire . . . . .	206
<b>Partie 3. Topologies faibles . . . . .</b>	<b>211</b>
<b>Chapitre 13. Dualité . . . . .</b>	<b>213</b>
13.1. Dual . . . . .	213
13.2. Dual d'un espace métrisable ou normé . . . . .	217
13.3. Dual d'un espace de Hilbert . . . . .	220
13.4. Extraction de sous-suites * faiblement convergentes . . . . .	223
13.5. Continuité de la forme bilinéaire de dualité . . . . .	228
13.6. Dual d'un produit . . . . .	229
13.7. Dual d'une somme directe . . . . .	230
<b>Chapitre 14. Dual d'un sous-espace . . . . .</b>	<b>233</b>
14.1. Théorème de Hahn–Banach . . . . .	233
14.2. Corollaires du théorème de Hahn–Banach . . . . .	235

14.3. Caractérisation d'un sous-espace dense . . . . .	236
14.4. Dual d'un sous-espace . . . . .	237
14.5. Dual d'une intersection . . . . .	239
14.6. Identifications périlleuses . . . . .	240
<b>Chapitre 15. Topologie faible . . . . .</b>	<b>245</b>
15.1. Topologie faible . . . . .	245
15.2. Continuité faible et inclusions topologiques . . . . .	248
15.3. Topologie faible d'un produit . . . . .	249
15.4. Topologie faible d'une intersection . . . . .	250
15.5. Norme et semi-normes d'une limite faible . . . . .	252
<b>Chapitre 16. Propriétés d'ensembles pour la topologie faible . . . . .</b>	<b>255</b>
16.1. Théorème de Banach–Mackey (ensembles faiblement bornés) . . . . .	255
16.2. Jauge d'un ouvert convexe . . . . .	257
16.3. Théorème de Mazur (convexes faiblement fermés) . . . . .	259
16.4. Théorème de Šmulian (ensembles faiblement compacts) . . . . .	261
16.5. Continuité semi-faible d'une application bilinéaire . . . . .	264
<b>Chapitre 17. Réflexivité . . . . .</b>	<b>267</b>
17.1. Espaces réflexifs . . . . .	267
17.2. Complétion séquentielle d'un espace semi-réflexif . . . . .	271
17.3. Préréflexivité des espaces métrisables . . . . .	272
17.4. Réflexivité des espaces de Hilbert . . . . .	275
17.5. Réflexivité des espaces de Banach uniformément convexes . . . . .	276
17.6. Une propriété des combinaisons de formes linéaires . . . . .	280
17.7. Caractérisations de la semi-réflexivité . . . . .	282
17.8. Réflexivité d'un sous-espace . . . . .	285
17.9. Réflexivité de l'image d'un espace . . . . .	286
17.10. Réflexivité du dual . . . . .	287
<b>Chapitre 18. Espaces extractables . . . . .</b>	<b>291</b>
18.1. Espaces extractables . . . . .	291
18.2. Extractabilité des espaces de Hilbert . . . . .	292
18.3. Extractabilité d'espaces semi-réflexifs . . . . .	293
18.4. Extractabilité d'un sous-espace ou de l'image d'un espace . . . . .	295
18.5. Extractabilité d'un produit ou d'une somme . . . . .	296
18.6. Extractabilité d'une intersection . . . . .	297
18.7. Complétion séquentielle des espaces extractables . . . . .	297

---

<b>Partie 4. Calcul différentiel</b> . . . . .	<b>299</b>
<b>Chapitre 19. Applications différentiables</b> . . . . .	<b>301</b>
19.1. Applications différentiables . . . . .	301
19.2. Différentiabilité, continuité et linéarité . . . . .	303
19.3. Différentiation et changement de topologie ou restriction . . . . .	305
19.4. Théorème des accroissements finis . . . . .	307
19.5. Bornes d'une application réelle différentiable . . . . .	310
19.6. Différentiation d'une application composée . . . . .	312
19.7. Différentielle d'une application réciproque . . . . .	316
19.8. Théorème d'inversion locale . . . . .	316
<b>Chapitre 20. Différentiation d'applications de plusieurs variables</b> . . . . .	<b>321</b>
20.1. Différentiation partielle . . . . .	321
20.2. Différentiation d'une application multilinéaire ou multicomposante . . . . .	324
20.3. Différentiation d'une application composée de plusieurs variables . . . . .	326
<b>Chapitre 21. Différentiations successives</b> . . . . .	<b>329</b>
21.1. Différentiations successives . . . . .	329
21.2. Théorème de symétrie de Schwarz . . . . .	331
21.3. Différentiations successives d'une application composée . . . . .	334
<b>Chapitre 22. Dérivation de fonctions d'une variable réelle</b> . . . . .	<b>339</b>
22.1. Dérivée d'une fonction d'une variable réelle . . . . .	339
22.2. Dérivée d'une fonction réelle d'une variable réelle . . . . .	341
22.3. Formule de Leibniz . . . . .	345
22.4. Dérivées des fonctions puissance, logarithme et exponentielle . . . . .	346
<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>351</b>
<b>Auteurs cités</b> . . . . .	<b>357</b>
<b>Notations</b> . . . . .	<b>361</b>
<b>Index</b> . . . . .	<b>363</b>