

1.1. Le développement des asservissements en milieu industriel

Le problème de la stabilisation inertielle consiste à produire une image dont l'orientation et la qualité ne dépendent pas du porteur. Pour cela, des senseurs optroniques sont portés par un dispositif mécatronique asservi inertiellement avec des gyromètres ou des gyroscopes, ce qui confère au viseur certaines fonctionnalités d'observation, de détection et d'identification. Citons par exemple les viseurs de chars, d'hélicoptères, les périscopes, les autodirecteurs de missile, etc.

Du fait du principe fondamental de la dynamique pour un solide en rotation, la vitesse absolue Ω_a de la ligne de visée d'inertie J est régie par :

$$J \frac{d\Omega_a}{dt} = C_{mot} - C_{ext} \quad [I.1]$$

Ainsi la stabilisation inertielle consiste en un problème de rejet de perturbations : avec un asservissement, on produit un couple utile C_{mot} (en général fourni par une motorisation électrique) devant s'opposer aux perturbations externes C_{ext} s'appliquant sur la charge à chaque instant. Plusieurs solutions d'architecture décrites exhaustivement dans [MAS 08] et [HIL 08] sont alors envisagées.

Pour satisfaire à ses fonctionnalités, le viseur doit disposer de la portée suffisante. Cette portée est directement liée à la performance de stabilisation du viseur, notamment vis-à-vis d'environnements mécaniques et de conditions d'emploi plus ou moins sévères, et doit être compatible avec le dimensionnement des capteurs optroniques ; ces derniers sont caractérisés par un temps d'intégration (T_i) (temps pendant lequel l'image est acquise et générée électroniquement) et par la taille de leurs détecteurs pixéliques (IFOV¹).

1. *Instantaneous Field of View.*

Ainsi pour avoir une portée suffisante, il faut conférer à la performance angulaire absolue de la ligne de visée² $\theta_a = \int \Omega_a$ une valeur compatible avec l'IFOV et ce, sur le temps d'intégration T_i , et en réponse à toutes les perturbations.

Le problème de stabilisation inertielle consiste à rejeter principalement deux types de perturbations externes :

- la première est le couple de frottements Γ_f engendré lors d'un mouvement relatif entre le porteur du viseur et la ligne de visée. Cette perturbation apparaît lorsque l'attitude du porteur du viseur évolue en basses fréquences. Afin d'éviter le bougé d'image lors de l'observation (et ainsi assurer un confort visuel), il convient de rendre le déplacement angulaire dynamique de la ligne de visée en réponse à Γ_f compatible avec l'IFOV. De même, l'erreur statique occasionnée doit être nulle. Plus particulièrement, la dynamique temporelle du rejet du frottement doit être compatible avec la dynamique maximale du régime oscillant du porteur qui n'est que de quelques Hz, une dizaine tout au plus. L'erreur en réponse aux frottements doit donc être nulle (ou tout du moins très faible) au bout d'un temps T_f . Pour valider les performances vis-à-vis de Γ_f , on emploie en général **une table oscillante** simulant les mouvements du porteur en basses fréquences ;

- la seconde perturbation Γ_v provient des déformations mécaniques de la structure du viseur qui, de par sa flexibilité, transmet à la ligne de visée, voire amplifie, une partie de l'environnement mécanique auquel le viseur est soumis. Afin de permettre au viseur d'assurer ses fonctionnalités d'observation, il convient de limiter le flou généré par cette perturbation haute fréquence³ à une valeur compatible avec l'IFOV pendant le temps d'intégration T_i . Pour valider les performances vis-à-vis de Γ_v , on emploie en général **un pot vibrant** simulant les vibrations hautes fréquences du porteur.

En plus de ces exigences de performances, d'autres exigences doivent être prises en considération lors de la conception de l'asservissement :

- parce que le viseur est un équipement embarqué et/ou pour préserver l'intégrité de la motorisation, une exigence sur la consommation énergétique de l'étage de stabilisation est nécessaire (contrainte sur la puissance instantanée maximale, contrainte sur le courant ou la tension maximale, etc.) ;

- parce que le viseur est un système de grande série employé sous des environnements variables, la conception de la loi de commande doit se faire sous contrainte de robustesse (en stabilité, en performances, etc.) vis-à-vis des incertitudes.

2. A vitesse de précession nulle.

3. Haute fréquence par rapport à la première perturbation qui est beaucoup plus basse fréquence.

Ainsi, l'automaticien doit concevoir une loi de commande unique qu'il validera sur un prototype unique, ayant un degré de robustesse suffisant pour satisfaire un cahier des charges complexe sur un grand nombre de systèmes. En réalité, c'est l'objectif recherché par tout automaticien travaillant en milieu industriel, désireux de développer en un minimum de temps une loi de commande la plus performante et robuste possible.

La méthodologie générale de développement des correcteurs d'asservissement sur un viseur prototype peut être résumée sur la figure I.1. En réalité, elle constitue un bon exemple de la méthodologie employée pour la résolution des problèmes d'automatique dans un cadre industriel. On y retrouve en effet les 4 phases usuelles de développement des asservissements :

- déclinaison des spécifications haut niveau par simplification et linéarisation et traduction en gabarits fréquentiels linéaires ;
- modélisation du système et de ses incertitudes ;
- synthèse des lois de commande ;
- expérimentations.

Cependant, cette méthodologie est sous-optimale et chronophage, donc coûteuse car :

- la loi de commande finale, qui est obtenue à l'étape 7 au travers de simplifications inévitables (linéarisation, etc.) et d'un processus expérimental itératif coûteux (étapes 5 et 6), doit satisfaire une spécification système haut niveau (étape 1) souvent complexe. Ces simplifications sont nécessaires pour l'emploi de techniques de commandes (étape 4), qui de fait nécessitent un certain degré d'expérience de la part de l'ingénieur ;

- basées sur la forme standard, les techniques modernes de type H_∞ employées à l'étape 4 permettent de déterminer un correcteur (potentiellement multivariables) qui est optimal (au sens de la norme H_∞) vis-à-vis de la tenue de gabarits linéaires (étape 3) sur les transferts en boucle fermée ou sur la boucle ouverte. Ces gabarits sont matérialisés par le réglage de pondérations fréquentielles sur les signaux à surveiller et sur les entrées exogènes (approche standard), ou directement sur les entrées et sorties du système (approche *loop-shaping*). La tâche la plus complexe de l'étape 4 consiste non pas à calculer le correcteur lui-même, mais à décliner les spécifications simplifiées en un choix judicieux de pondérations : ce réglage est en soit un processus itératif nécessitant un fort degré d'expérience de la part de l'ingénieur, et ce d'autant plus qu'il doit se poser un certain nombre de questions, par exemple :

– pour une problématique SISO⁴, comment choisir la structure des pondérations à régler ainsi que le nombre de pôles, des zéros et leur ordre ?

– dans le cas MIMO⁵ où on rajoute en général autant de pondérations que de mesures et de commandes disponibles, le nombre de transferts à « gabariser » devient vite très grand, de sorte qu'on procède en général à un réglage séquentiel et découplé des pondérations des différents canaux en supposant les pondérations matricielles diagonales : qu'en est-il de l'optimalité du réglage sous ces hypothèses structurelles simplificatrices ? Quelle est la structure la plus adaptée : diagonale ou pleine ?

– quel est le meilleur compromis performance/robustesse atteignable ?

– notons que certaines techniques de synthèse robuste conceptuellement très puissantes, telle que la μ -synthèse, deviennent sous-optimales de par leur méthode de résolution, ce qui peut naturellement être un frein quant à leur emploi ;

– les méthodes de synthèse modernes générant un correcteur d'ordre souvent élevé, on procède en général à une post-réduction de ce dernier avant son implémentation numérique. Cette post-réduction peut dégrader la performance et la robustesse si bien qu'il faut prendre en compte a priori la contrainte d'ordre. Par ailleurs se pose aussi la question de savoir quelle est la meilleure structure de correction pour le problème posé ? Est-ce la structure multi-boucles cascadée, la structure multi-variables en *feedback* ou la structure décentralisée ?

Nous avons listé là quelques exemples d'interrogations que l'ingénieur est amené à se poser. Cette liste n'est pas exhaustive. En réalité, la réponse adéquate à ces questionnements dépend du degré d'expérience de l'ingénieur et de son savoir-faire, et la plupart du temps, il procède à des simplifications pour avancer dans le processus de synthèse, simplifications rendant la solution finale coûteuse et sous-optimale vis-à-vis de l'objectif premier qu'est la spécification système haut niveau (étape 1).

Ainsi l'enjeu de cet ouvrage est de rendre la méthodologie de synthèse des correcteurs des asservissements en milieu industriel plus adaptée car plus directe et donc moins coûteuse en temps de développement en calculant un correcteur final (structuré) par une attaque directe de la spécification système haut niveau.

4. *Single Input, Single Output.*

5. *Multiple Inputs, Multiple Outputs.*

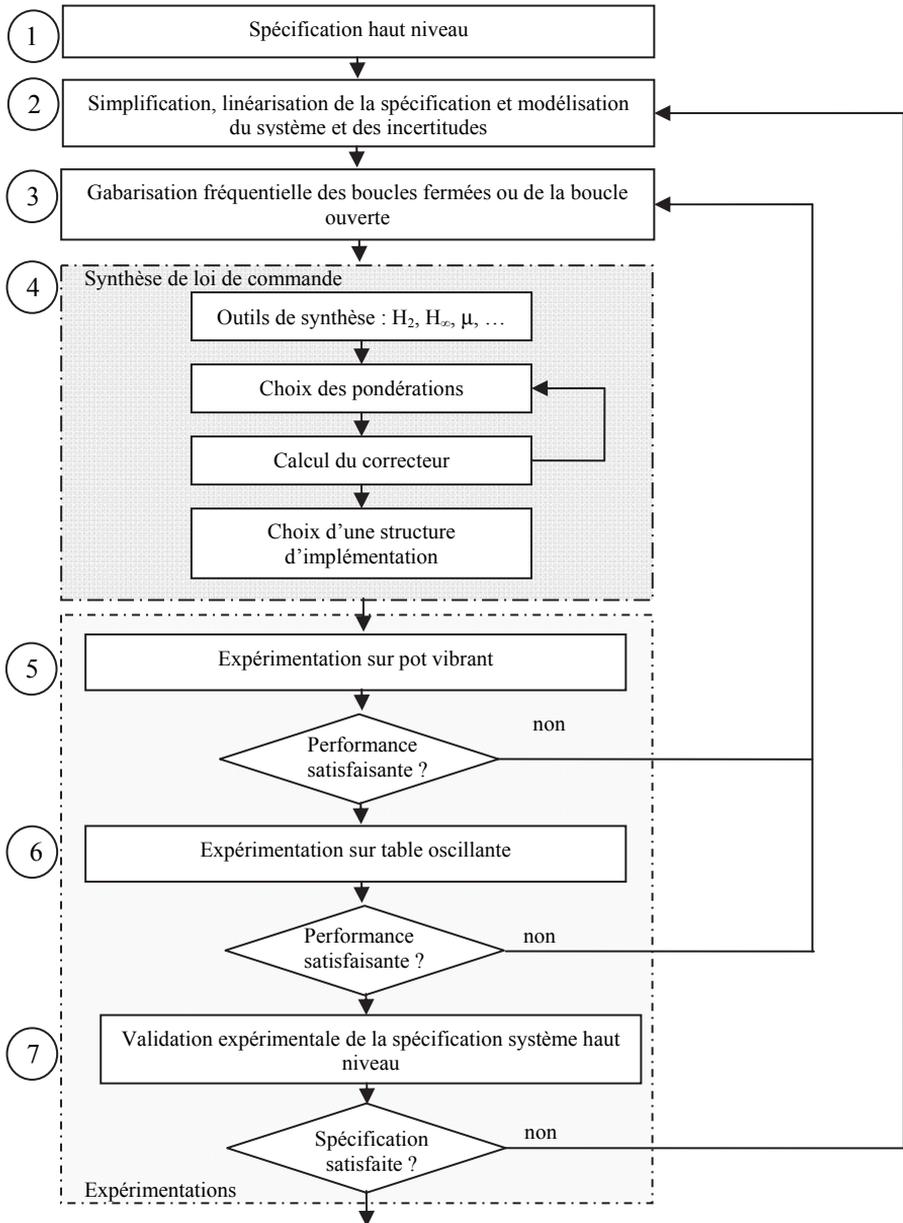


Figure I.1. Méthodologie du développement des correcteurs des asservissements des viseurs

1.2. Place de l'optimisation

L'optimisation joue toujours un grand rôle pour résoudre les problèmes d'automatique qui consistent la plupart du temps à calculer un correcteur stabilisant satisfaisant un cahier des charges. Le problème à résoudre peut souvent être énoncé sous la forme générale d'un problème d'optimisation dans lequel on définit une fonction objectif ou fonction de coût (voire plusieurs) $f(x)$ que l'on cherche à minimiser par rapport à tous les paramètres concernés x . La définition d'un tel problème est souvent complétée par la donnée de contraintes portant sur x . Les variables de décision (les paramètres à déterminer) sont alors les variables qui définissent le correcteur à chercher (par exemple les matrices de sa représentation d'état, les coefficients de sa fonction de transfert).

[SCH 97] montre que de nombreux critères de l'automatique s'expriment mathématiquement de manière simple sous la forme d'inégalités matricielles affines (LMI) ; la fonction de coût et les contraintes sont alors des fonctions affines de x . Dans ce cas, le calcul du correcteur optimal est alors réalisé numériquement par des solveurs performants d'optimisation sous contraintes LMI. La convexité des problèmes formulés rend possible la détermination de la solution globale, bien que cela s'accompagne d'un temps de calcul conséquent et de possibles problèmes numériques lorsque le nombre de variables de décisions est important (typiquement quelques milliers).

Lorsque les critères sont plus compliqués à exprimer, la mise en œuvre de telles techniques s'avère la plupart du temps infructueuse car la solution, lorsqu'elle est trouvée, n'est optimale que localement. L'emploi de techniques de descente nécessite la formulation du gradient ce qui n'est pas toujours possible. D'autres techniques ne nécessitant pas la formulation du gradient existent telles que [NEL 65] mais elles ne convergent souvent que localement.

Depuis quelques années, on assiste à l'émergence de nombreuses métaheuristiques avec une ambition commune : résoudre au mieux les problèmes d'optimisation difficiles [DRE 06]. Pour tenter de cerner le domaine de « l'optimisation difficile », il est nécessaire de faire la distinction entre deux types de problèmes : les problèmes « discrets » et les problèmes à variables continues. Sans préjuger cette fois de la forme de la fonction $f(x)$ à minimiser, un problème discret consiste à imposer à x un ensemble fini de valeurs possibles ; un problème continu consiste à imposer à x d'appartenir à un intervalle de valeurs.

Ainsi, deux sortes de problèmes reçoivent dans la littérature l'appellation « optimisation difficile » :

– certains problèmes d'optimisation discrète, pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme exact polynomial (c'est-à-dire dont le temps de calcul est proportionnel à une puissance de n , où n est le nombre d'inconnues du problème). C'est le cas en particulier des problèmes dits « NP difficiles », pour lesquels on conjecture ou on sait qu'il n'existe pas d'algorithme dont le temps de résolution soit borné par un polynôme de degré n ;

– certains problèmes d'optimisation à variables continues, pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme permettant de repérer un optimum global (c'est-à-dire la meilleure solution possible) à coup sûr et en un nombre fini de calculs.

Les métaheuristiques se révèlent être un outil industriel précieux pour résoudre les problèmes d'optimisation posés ici, car ces méthodes ne préjugent pas de la forme de la fonction de coût $f(x)$ à minimiser, ce qui permet de prendre en compte finalement des spécifications posées sous toute forme, notamment les contraintes sur la dispersion du système, sur n'importe quel système, simplifiant de fait la phase de déclinaison ou de reformulation du cahier des charges dans un cadre mathématique adapté et réduisant donc l'impact de l'expérience du concepteur sur la robustesse finale : la formulation du gradient n'est pas nécessaire, la seule contrainte étant la capacité à pouvoir évaluer la fonction de coût $f(x)$, qui peut avoir une forme quelconque. A la différence des méthodes type *simplex*, elles sont stochastiques ce qui évite l'explosion combinatoire des possibilités pour trouver le minimum global de $f(x)$. [SIA 02] montre clairement l'avantage à tirer de l'optimisation par métaheuristiques qui permet de remédier au problème du piègeage d'un algorithme itératif « classique » dans un minimum local.

Le principe d'un algorithme classique d'amélioration itérative est le suivant. On part d'une configuration initiale x_0 , choisie au hasard. On essaie alors une modification élémentaire, souvent appelée mouvement, et on compare les valeurs de la fonction objectif $f(x)$ avant et après modification. Si le changement conduit à une diminution de la fonction objectif $f(x_1) < f(x_0)$, alors il est accepté et la configuration x_1 sert de point de départ pour le prochain essai. Dans le cas contraire, on revient à la condition précédente avant de refaire une tentative. Le processus est itéré jusqu'à ce que tout essai rende le résultat moins bon. La figure I.2. montre que les méthodes classiques ou méthode de descente ou méthode de la plus grande pente ne conduisent souvent qu'à un minimum local x_n , qui constitue la meilleure solution possible compte tenu de la condition initiale x_0 . Même en appliquant plusieurs fois la procédure avec des conditions initiales différentes, on ne peut être certain de trouver la configuration optimale x_{opt} .

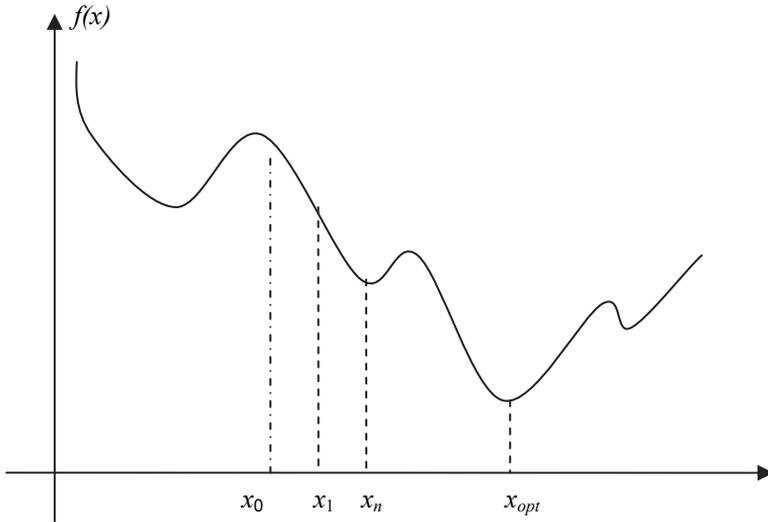


Figure I.2. Fonction multimodale à minimiser

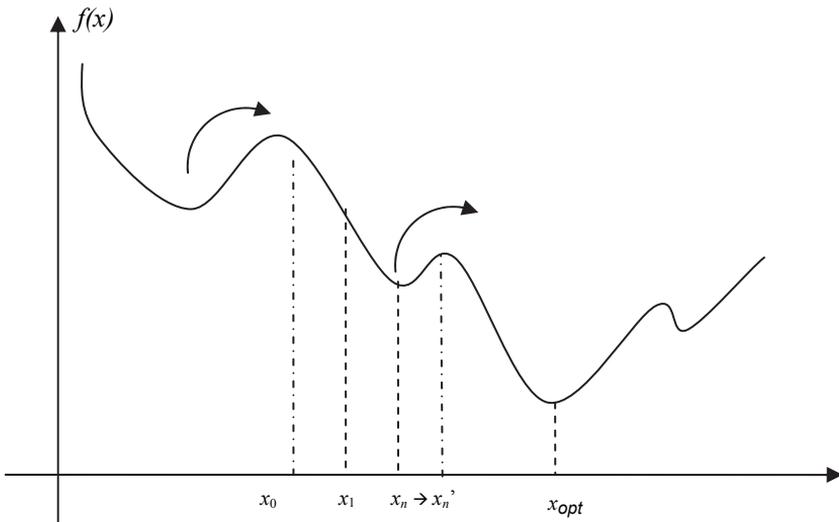


Figure I.3. Extraction des minima locaux

Pour surmonter l'obstacle des minimums locaux, une autre idée s'est montrée très fructueuse au point qu'elle est à la base de nombreuses métaheuristiques : il s'agit

d'autoriser, de temps en temps, des remontées, c'est-à-dire d'accepter une dégradation temporaire de la situation lors du changement de la configuration courante. C'est le cas si l'on passe de x_n à x_n' sur la figure I.3. Un mécanisme de contrôle des dégradations, spécifique à chaque métaheuristique, permet d'éviter la divergence du procédé. Il devient dès lors possible de s'extraire du piège que représente un minimum local, pour partir explorer une autre « vallée » plus prometteuse.

C'est ce principe que nous souhaitons exploiter pour déterminer un correcteur vis-à-vis d'une spécification système complexe haut niveau.

A titre d'exemple, [SAN 10] montre une application intéressante et prometteuse de la méthode des essais particuliers pour le réglage automatique des pondérations d'une schématique de synthèse 4-blocs H_∞ . Les travaux montrent notamment comment prendre en compte simultanément des critères temporels et fréquentiels pour le réglage des pondérations : la métaheuristique considérée est alors vue comme une surcouche de la méthode de synthèse employée.

L'ouvrage est organisé de la manière suivante. Dans un premier temps on décrit les principales métaheuristicques employées. Puis on reformule, dans une seconde partie, les problèmes de commande moderne pour l'optimisation stochastique : en abordant les problèmes structurés de la synthèse H_∞ , de la μ -synthèse et de la synthèse LPV, nous montrons la grande flexibilité qu'offre l'emploi de l'optimisation stochastique pour la prise en compte de contraintes complexes (synthèse multi-modèles, synthèse mixte H_2/H_∞ , contraintes de placement de pôles, etc.). Une troisième partie, basée sur les résultats obtenus, présente une méthode générique pour synthétiser des correcteurs robustes et structurés vis-à-vis de critères de n'importe quelle forme. Après avoir traduit le critère haut niveau sous la forme d'une fonction de coût générique, on propose la résolution de deux problèmes duaux : d'une part l'optimisation des pondérations de synthèse dans le cadre de la synthèse H_∞ par *loop-shaping*, d'autre part l'optimisation directe du correcteur structuré par la mise en œuvre de *scalings* statiques en lieu et place des pondérations fréquentielles. Enfin, la quatrième partie consiste en la description de la boîte à outils numérique HinfStoch développée par l'auteur à partir des résultats théoriques obtenus dans l'ensemble de l'ouvrage, et téléchargeable sur le site de l'éditeur ainsi que sur la page personnel de l'auteur⁶.

L'ensemble de l'exposé est illustré d'exemples industriels tels que celui de la stabilisation inertielle de ligne de visée, mais aussi d'exemples académiques.

6. www.philippe.feyel.free.fr.

1.3. Notations et définitions

Nous rappelons ci-dessous quelques notions et notations fondamentales employées abondamment dans les différents chapitres de l'ouvrage.

1.3.1. Systèmes linéaires et invariants (SLI)

1.3.1.1. Représentation des SLI

Un système linéaire et invariant d'ordre n à m entrées et p sorties est décrit par une représentation d'état définie par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad [I.2]$$

où⁷ :

- $x(t) \in \mathbf{R}^n$ est l'état du système ;
- $x(t_0)$ est la condition initiale ;
- $u(t) \in \mathbf{R}^m$ l'entrée du système ;
- $y(t) \in \mathbf{R}^p$ sa sortie ;
- $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état ;
- $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ est la matrice de commande ;
- $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ est la matrice d'observation ;
- $D \in \mathbf{R}^{p \times m}$ est la matrice de transfert direct.

Pour une condition initiale $x(t_0)$ donnée, l'évolution de l'état du système et de sa sortie est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad [I.3]$$

7. L'ensemble des nombres réels est noté \mathbf{R} , celui des nombres complexes est noté \mathbf{C} .

Le système est stable (au sens entrée bornée/sortie bornée) si les valeurs propres de A sont toutes à partie réelle strictement négative, c'est-à-dire si :

$$\max_{i \in [1, \dots, n]} \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0 \quad [\text{I.4}]$$

où $\lambda_i(A)$ est la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de A .

Pour une condition initiale nulle, la matrice de transfert entrée/sortie du système est définie dans le domaine de Laplace par :

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad [\text{I.5}]$$

que l'on note par commodité :

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] := C(sI - A)^{-1}B + D \quad [\text{I.6}]$$

ou encore :

$$[A, B, C, D] := C(sI - A)^{-1}B + D \quad [\text{I.7}]$$

Lorsque $H(\infty)$ est bornée, H est dite propre⁸. Lorsque $H(\infty)=0$, alors le système est dit strictement propre et $D = 0$.

Enfin pour une même matrice de transfert, il existe une infinité de représentations d'état possible. En effet, considérons le changement de base $T \in \mathbf{R}^{n \times n}$, avec T inversible, tel que :

$$\bar{x} = Tx \quad [\text{I.8}]$$

alors la représentation d'état initiale devient :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{dt} &= TAT^{-1}\bar{x}(t) + TBu(t) \\ y(t) &= CT^{-1}\bar{x}(t) + Du(t) \end{aligned} \quad [\text{I.9}]$$

en passant dans le domaine de Laplace :

$$CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB + D = C(sI - A)^{-1}B + D = H(s) \quad [\text{I.10}]$$

8. Dans le cas d'un transfert SISO, cela revient à dire que le degré du numérateur est inférieur ou égal au degré du dénominateur.

1.3.1.2. Commandabilité et observabilité des SLI

Le système H ou la paire (A,B) est dit commandable si, pour toute condition initiale $x(t_0) = x_0$, pour tout $t_1 > 0$ et pour tout état final x_1 , il existe une commande $u(\cdot)$ continue par morceau pouvant amener l'état du système en $x(t_1) = x_1$.

On s'assure de la commandabilité en vérifiant que pour tout $t > t_0$, le grammien de commandabilité $W_c(t)$ est défini positif :

$$W_c(t) := \int_{t_0}^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad [I.11]$$

Une condition équivalente est que la matrice $\begin{pmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{pmatrix}$ soit de rang plein en ligne, c'est-à-dire n .

Le système H ou la paire (C,A) est observable si, pour tout $t_1 > 0$, l'état initial $x(t_0)=x_0$ peut être déterminé par les valeurs passées de la commande $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ dans l'intervalle $[t_0, t_1]$.

On s'assure de l'observabilité en vérifiant que pour tout $t > t_0$, le grammien d'observabilité $W_o(t)$ est défini positif :

$$W_o(t) := \int_{t_0}^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau \quad [I.12]$$

Une condition équivalente est que la matrice :

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad [I.13]$$

soit de rang plein en colonne, c'est-à-dire n .

1.3.1.3. Opérations élémentaires sur les SLI

Soit le système H de transfert :

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] := C(sI - A)^{-1} B + D \quad [I.14]$$

Le transposé de H est défini par le système :

$$H^T(s) = B^T (sI - A^T)^{-1} C^T + D^T := \left[\begin{array}{c|c} A^T & C^T \\ \hline B^T & D^T \end{array} \right] \quad [\text{I.15}]$$

Le conjugué de H est défini par le système :

$$H^*(s) = H^T(-s) = B^T (-sI - A^T)^{-1} C^T + D^T := \left[\begin{array}{c|c} -A^T & -C^T \\ \hline B^T & D^T \end{array} \right] \quad [\text{I.16}]$$

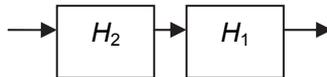
Si D est inversible, l'inverse de H est défini par le système :

$$H^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A - BD^{-1}C & -BD^{-1} \\ \hline D^{-1}C & D^{-1} \end{array} \right] \quad [\text{I.17}]$$

On considère maintenant deux systèmes H_1 et H_2 de représentations d'état respectives :

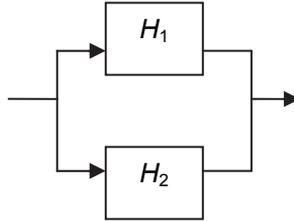
$$H_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] \quad H_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] \quad [\text{I.18}]$$

La mise en série (ou produit) de H_1 avec H_2 conduit au système :



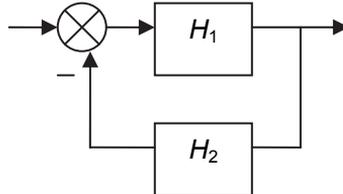
$$\begin{aligned} H_1 H_2 &= \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 C_2 & B_1 D_2 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1 C_2 & D_1 D_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_2 & 0 & B_2 \\ \hline B_1 C_2 & A_1 & B_1 D_2 \\ \hline D_1 C_2 & C_1 & D_1 D_2 \end{array} \right] \quad [\text{I.19}] \end{aligned}$$

La mise en parallèle (ou addition) de H_1 et de H_2 conduit au système :



$$\begin{aligned}
 H_1 + H_2 &= \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] \\
 &= \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D_2 \end{array} \right]
 \end{aligned}
 \tag{I.20}$$

Le bouclage de H_2 en rétroaction de H_1 conduit au système :



$$\begin{aligned}
 (I + H_1 H_2)^{-1} H_1 &= \\
 &\left[\begin{array}{cc|c} A_1 - B_1 D_2 R_{12}^{-1} C_1 & -B_1 R_{21}^{-1} C_2 & B_1 R_{21}^{-1} \\ B_2 R_{12}^{-1} C_1 & A_2 - B_2 D_1 R_{21}^{-1} C_2 & B_2 D_1 R_{21}^{-1} \\ \hline R_{12}^{-1} C_1 & -R_{12}^{-1} D_1 C_2 & D_1 R_{21}^{-1} \end{array} \right]
 \end{aligned}
 \tag{I.21}$$

avec : $R_{12} = I + D_1 D_2$ et $R_{21} = I + D_2 D_1$.

On retrouvera de nombreuses notions sur les systèmes linéaires et invariants dans [ZHO 96].

1.3.2. Valeurs singulières

1.3.2.1. Définition

Les valeurs singulières d'une matrice de transfert $H(s)$ de dimension $p \times m$ sont définies comme les racines carrées des valeurs propres du produit de sa réponse fréquentielle $H(j\omega)$ par son conjugué :

$$\sigma_i(H(j\omega)) = \sqrt{\lambda_i(H(j\omega)H(-j\omega)^T)} = \sqrt{\lambda_i(H(-j\omega)^T H(j\omega))} \quad [1.22]$$

$$i = [1, \dots, \min(m, p)]$$

Les valeurs singulières sont des nombres réels positifs ou nuls et elles peuvent être classées. La plus grande valeur singulière, appelée aussi valeur singulière supérieure, est notée $\overline{\sigma}(H)$ et la plus petite, appelée aussi valeur singulière inférieure, est notée $\underline{\sigma}(H)$:

$$\overline{\sigma}(H(j\omega)) = \sigma_1(H(j\omega)) \geq \sigma_2(H(j\omega)) \geq \dots \geq \underline{\sigma}(H(j\omega)) \quad [1.23]$$

Dans le cas d'un système monovarié (c'est-à-dire $m=p=1$), la valeur singulière unique est égale au module de la réponse fréquentielle :

$$\overline{\sigma}(H(j\omega)) = \underline{\sigma}(H(j\omega)) = |H(j\omega)| \quad [1.24]$$

Les valeurs singulières généralisent donc aux systèmes multivariés la notion de gain établie dans le cas de systèmes monovariés. Ainsi H sera dit de gain fort si $\overline{\sigma}(H)$ est grande et de gain faible si $\underline{\sigma}(H)$ est petite.

1.3.2.2. Propriétés

On emploie abondamment dans cet ouvrage les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(H) = 0 &\Leftrightarrow H = 0 \\ \overline{\sigma}(H^*) &= \overline{\sigma}(H) \\ \overline{\sigma}(H^T) &= \overline{\sigma}(H) \\ \sigma_i(\alpha H) &= |\alpha| \sigma_i(H) \\ \text{si } H^{-1} \text{ existe, } \underline{\sigma}(H) \overline{\sigma}(H^{-1}) &= \underline{\sigma}(H^{-1}) \overline{\sigma}(H) = 1 \\ \overline{\sigma}(H) &= \max_{\substack{x \in \mathbb{C}^m \\ x \neq 0}} \frac{\|Hx\|_2}{\|x\|_2} \\ \underline{\sigma}(H) &= \min_{\substack{x \in \mathbb{C}^m \\ x \neq 0}} \frac{\|Hx\|_2}{\|x\|_2} \end{aligned} \quad [1.25]$$

Dans le cas de deux systèmes en parallèle, on retiendra les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{\sigma} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} &\leq \overline{\sigma}(H_1) + \overline{\sigma}(H_2) \\ \max(\overline{\sigma}(H_1), \overline{\sigma}(H_2)) &\leq \overline{\sigma} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \leq \sqrt{2} \max(\overline{\sigma}(H_1), \overline{\sigma}(H_2)) \\ \overline{\sigma} \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} &= \max(\overline{\sigma}(H_1), \overline{\sigma}(H_2)) \end{aligned} \quad [I.26]$$

Dans le cas de deux systèmes en séries, une propriété importante est :

$$\begin{aligned} \sigma_i(H_1) \underline{\sigma}(H_2) &\leq \sigma_i(H_1 H_2) \leq \sigma_i(H_1) \overline{\sigma}(H_2) \\ &\text{ou} \\ \underline{\sigma}(H_1) \sigma_i(H_2) &\leq \sigma_i(H_1 H_2) \leq \overline{\sigma}(H_1) \sigma_i(H_2) \end{aligned} \quad [I.27]$$

On retiendra notamment les cas particuliers suivants :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(H_1) \overline{\sigma}(H_2) &\leq \overline{\sigma}(H_1 H_2) \leq \overline{\sigma}(H_1) \overline{\sigma}(H_2) \\ \overline{\sigma}(H_1) \underline{\sigma}(H_2) &\leq \overline{\sigma}(H_1 H_2) \leq \overline{\sigma}(H_1) \overline{\sigma}(H_2) \\ \underline{\sigma}(H_1) \underline{\sigma}(H_2) &\leq \underline{\sigma}(H_1 H_2) \leq \overline{\sigma}(H_1) \underline{\sigma}(H_2) \\ \underline{\sigma}(H_1) \underline{\sigma}(H_2) &\leq \underline{\sigma}(H_1 H_2) \leq \underline{\sigma}(H_1) \overline{\sigma}(H_2) \end{aligned} \quad [I.28]$$

Dans le cas de la somme de deux systèmes, une propriété importante est :

$$\left| \sigma_i(H_1) - \overline{\sigma}(H_2) \right| \leq \sigma_i(H_1 + H_2) \leq \sigma_i(H_1) + \overline{\sigma}(H_2) \quad [I.29]$$

On retiendra notamment les deux cas particuliers suivants :

$$\begin{aligned} \left| \overline{\sigma}(H_1) - \overline{\sigma}(H_2) \right| &\leq \overline{\sigma}(H_1 + H_2) \leq \overline{\sigma}(H_1) + \overline{\sigma}(H_2) \\ \underline{\sigma}(H_1) - \overline{\sigma}(H_2) &\leq \underline{\sigma}(H_1 + H_2) \leq \underline{\sigma}(H_1) + \overline{\sigma}(H_2) \end{aligned} \quad [I.30]$$

qui amènent à :

$$\underline{\sigma}(H) - 1 \leq \underline{\sigma}(H + I) \leq \underline{\sigma}(H) + 1 \quad [I.31]$$

ou encore :

$$\underline{\sigma}(H) - 1 \leq \frac{1}{\overline{\sigma}((H + I)^{-1})} \leq \underline{\sigma}(H) + 1 \quad [I.32]$$

Enfin on retiendra la propriété suivante :

$$\overline{\sigma}(H_1) < \underline{\sigma}(H_2) \Rightarrow \underline{\sigma}(H_1 + H_2) > 0 \quad [I.33]$$

Le lecteur pourra retrouver davantage de développements à propos des inégalités sur les valeurs singulières dans [MER 04].

1.3.3. Ensemble \mathbf{RH}_∞ et norme H_∞

1.3.3.1. Définition

On appelle L_∞^n l'ensemble des fonctions vectorielles $f(s)$, $s \in \mathbf{C}$ de dimension n et bornées sur l'axe imaginaire, c'est-à-dire vérifiant :

$$\|f\|_\infty = \sup_{\omega} \|f(j\omega)\|_2 < +\infty \quad [I.34]$$

où :

- $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne ;
- H_∞^n est le sous-espace des fonctions de L_∞^n analytiques et bornées dans \mathbf{C}^+ ;
- $\mathbf{RL}_\infty^{p \times m}$ est le sous-espace des matrices de transfert rationnelles de dimension $p \times m$ à coefficients réels, propres et sans pôle sur l'axe imaginaire ;
- $\mathbf{RH}_\infty^{p \times m}$ est le sous-espace des matrices de transfert rationnelles de dimension $p \times m$ à coefficients réels, propres et stables (c'est-à-dire sans pôle dans \mathbf{C}^+).

Pour tout système $H \in \mathbf{RH}_\infty^{p \times m}$, la norme H_∞ de H est définie par :

$$\|H\|_\infty = \sup_{\omega \in R} \overline{\sigma}(H(j\omega)) \quad [I.35]$$

C'est donc la valeur la plus élevée du gain du système sur l'ensemble des pulsations.

1.3.3.2. Propriétés

L'ensemble des propriétés valant pour la valeur singulière supérieure valent aussi sur la norme H_∞ .

On utilisera notamment très souvent dans cet ouvrage les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \|H_1(s)H_2(s)\|_\infty &\leq \|H_1(s)\|_\infty \|H_2(s)\|_\infty \\ \sup(\|H_1(s)\|_\infty, \|H_2(s)\|_\infty) &\leq \left\| \begin{pmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty \\ \sup(\|H_1(s)\|_\infty, \|H_2(s)\|_\infty) &\leq \|(H_1(s) \quad H_2(s))\|_\infty \end{aligned} \quad [1.36]$$

ce qui implique notamment que :

$$\left\| \begin{pmatrix} H_1(s) & H_3(s) \\ H_2(s) & H_4(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \gamma \Rightarrow \begin{cases} \|H_1(s)\|_\infty \leq \gamma \\ \|H_2(s)\|_\infty \leq \gamma \\ \|H_3(s)\|_\infty \leq \gamma \\ \|H_4(s)\|_\infty \leq \gamma \end{cases} \quad [1.37]$$

Enfin :

$$\left\| \begin{pmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \sqrt{\|H_1(s)\|_\infty^2 + \|H_2(s)\|_\infty^2} \quad [1.38]$$

1.3.4. Transformation fractionnaire linéaire (LFT)

1.3.4.1. Définition

Soit une matrice complexe P partitionnée comme suit :

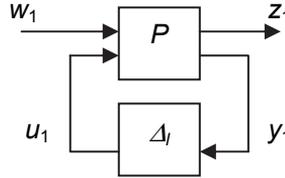
$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)} \quad [1.39]$$

Soit deux autres matrices complexes $\Delta_l \in \mathbf{C}^{q_2 \times p_2}$ et $\Delta_u \in \mathbf{C}^{q_1 \times p_1}$.

En supposant que $(I - P_{22}\Delta_l)^{-1}$ existe, la transformation fractionnaire linéaire (ou LFT) inférieure est définie par :

$$F_l(P, \Delta_l) = P_{11} + P_{12}\Delta_l(I - P_{22}\Delta_l)^{-1}P_{21} \quad [\text{I.40}]$$

qui correspond au schéma bloc suivant où la matrice Δ_l reboucle P « par en-dessous » :



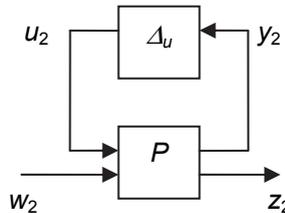
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} w_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad [\text{I.41}]$$

$$u_1 = \Delta_l y_1$$

En supposant que $(I - P_{11}\Delta_u)^{-1}$ existe, la transformation fractionnaire linéaire (ou LFT) supérieure est définie par :

$$F_u(P, \Delta_u) = P_{22} + P_{21}\Delta_u(I - P_{11}\Delta_u)^{-1}P_{12} \quad [\text{I.42}]$$

qui correspond au schéma bloc suivant où la matrice Δ_u reboucle P « par le dessus » :



$$\begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad [\text{I.43}]$$

$$u_2 = \Delta_u y_2$$

On retiendra aussi que si H_3 est inversible, alors par définition :

$$\begin{aligned} (H_1 + H_2 Q)(H_3 + H_4 Q)^{-1} &= F_l(M, Q) \\ (H_3 + H_4 Q)^{-1}(H_1 + H_2 Q) &= F_l(N, Q) \end{aligned} \quad [I.44]$$

avec :

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} H_1 H_3^{-1} & H_2 - H_1 H_3^{-1} H_4 \\ H_3^{-1} & -H_3^{-1} H_4 \end{pmatrix} \\ N &= \begin{pmatrix} H_3^{-1} H_1 & H_3^{-1} \\ H_2 - H_4 H_3^{-1} H_1 & -H_4 H_3^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad [I.45]$$

1.3.4.2. Propriétés

Une propriété fondamentale des LFT est que l'association de plusieurs LFT reste une LFT.

Soit M et Q partitionnées comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix} \quad [I.46]$$

Les LFT supérieure et inférieure sont reliées par l'égalité suivante :

$$F_u(M, \Delta) = F_u(N, \Delta) \quad [I.47]$$

avec :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{22} & M_{21} \\ M_{12} & M_{11} \end{pmatrix} \quad [I.48]$$

L'inversion d'une LFT est une LFT :

$$(F_u(M, \Delta))^{-1} = F_u(N, \Delta) \quad [I.49]$$

avec :

$$N = \begin{pmatrix} M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{21} & -M_{12} M_{22}^{-1} \\ M_{22}^{-1} M_{21} & M_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad [I.50]$$

La somme de deux LFT est une LFT :

$$F_u(M, \Delta_1) + F_u(Q, \Delta_2) = F_u(N, \Delta) \quad [I.51]$$

avec :

$$N = \left(\begin{array}{cc|c} M_{11} & 0 & M_{11} \\ 0 & Q_{11} & Q_{12} \\ \hline M_{21} & Q_{21} & M_{22} + Q_{22} \end{array} \right), \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} \quad [I.52]$$

Le produit de deux LFT est une LFT :

$$F_u(M, \Delta_1) F_u(Q, \Delta_2) = F_u(N, \Delta) \quad [I.53]$$

avec :

$$N = \left(\begin{array}{cc|c} M_{11} & M_{12}Q_{21} & M_{12}Q_{22} \\ 0 & M_{11} & Q_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22}Q_{21} & M_{22}Q_{22} \end{array} \right), \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} \quad [I.54]$$

Soit G partitionnée comme suit :

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad [I.55]$$

Le bouclage de deux LFT entre-elles est une LFT :

$$F_l(F_u(G, \Delta_1), F_u(Q, \Delta_2)) = F_u(F_l(G, F_u(Q, \Delta_2)), \Delta_1) = F_u(N, \Delta) \quad [I.56]$$



avec :

$$N = \left(\begin{array}{cc|c} A + B_2 Q_{22} L_1 C_2 & B_2 L_2 Q_{21} & B_1 + B_2 Q_{22} L_1 D_{21} \\ \hline Q_{12} L_1 C_2 & Q_{11} + Q_{12} L_1 D_{22} Q_{21} & Q_{12} L_1 D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} L_2 Q_{22} C_2 & D_{12} L_2 Q_{21} & D_{11} + D_{12} Q_{22} L_1 D_{21} \end{array} \right) \quad [1.57]$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix}$$

Terminons enfin par le théorème de RedHeffer : si $\|M(s)\|_\infty < \gamma$ et $\|\Delta(s)\|_\infty < \gamma^{-1}$, alors $\|F_1(M(s), \Delta(s))\|_\infty < \gamma$.