Table des matières

Avant-propos 11

Partie 1. L'apport des philosophes mathématiciens 17

Introduction de la partie 1 19

Chapitre 1. Les grandeurs irrationnelles 23

1.1. L'apparition des irrationnelles ou la fin du rêve pythagoricien 24
1.2. Premier impact philosophique 25
1.3. Conséquences de la découverte des irrationnelles 27
1.3.1. La fin de l'éternel retour 27
1.3.2. L'abandon des belles proportions 27
1.3.3. Le problème du désordre en médecine, en morale et en politique . 28
1.4. Des solutions possibles 29
1.5. Un exemple célèbre : le nombre d'or 30
1.6. Platon et les processus dichotomiques 32
1.7. La généralisation platonicienne du pythagorisme ancien 33
1.7.1. Le texte de la ligne 33
1.7.2. L'interprétation algébrique 35
1.7.2.1. Les impossibilités 36
1.7.2.2. Le cas $k = \phi$ 36
1.8. Conséquence épistémologique : l'évolution de la raison 37

Chapitre 2. Autour de la duplication du cube 41

2.1. Historique de la question de la duplication du cube 42
2.2. Non-rationalité de la solution 42
2.2.1. Démonstration 42
2.2.2. La diagonale n'est pas une solution 43

2.3. L'avancée d'Hippocrate de Chios 43
2.4. Une application philosophique : la cosmologie platonicienne 45
2.5. Le problème et ses solutions 47
2.5.1. L'avenir du problème 48
2.5.2. Quelques solutions des auteurs de l'Antiquité 48
2.5.2.1. Les solutions mécaniques 48
2.5.2.2. Les solutions analytiques 50
2.5.3. La duplication du cube au-delà d'Archytas. L'évolution des méthodes mathématiques 54
2.5.3.1. La solution de Ménechme 55
2.5.3.2. Bref regard sur les autres solutions 57
2.6. Sur la trisection de l'angle 58
2.6.1. Des mathématiciens audacieux 58
2.6.2. Platon, la tripartition de l'âme et l'automotricité 61
2.6.3. Une « coquille » bien nécessaire 63
2.6.4. Excursus final 64
2.7. Problèmes impossibles et problèmes mal posés 65
2.8. La démonstration moderne 66

Chapitre 3. Quadratures, trigonométrie et transcendance 69

3.1. Le mystérieux nombre π 70
3.2. L'erreur des « quadrateurs » 71
3.3. Le calcul explicite de π 73
3.4. Considérations trigonométriques 75
3.5. La philosophie paradoxale de Nicolas de Cues 77
3.5.1. Un essai de calcul approché de π 77
3.5.2. Extension philosophique 79
3.6. Suite et fin de l'histoire de π 82
3.6.1. L'époque des produits infinis 82
3.6.2. L'algorithme de Machin 83
3.6.3. Le problème de la nature de π 83
3.6.4. Transcendance numérique et philosophique : Kant, Lambert et Legendre 84

Partie 2. La montée en puissance des mathématiques 89

Introduction de la partie 2 91

Chapitre 4. Un projet de *Mathesis* au XVIIe siècle 95

4.1. Les innovations de la mathématique cartésienne 96
4.2. Le « plan » de la *Géométrie* de Descartes 99

4.3. Etude de la classification des courbes 99
4.3.1. Explications possibles de l'erreur des Anciens 101
4.3.2. Les conditions de recevabilité des courbes en géométrie 103
4.4. Les constructions légitimes 105
4.5. Conséquences scientifiques des définitions cartésiennes 107
4.6. Conséquences métaphysiques de la mathématique cartésienne 107

Chapitre 5. La question de l'infiniment petit 111

5.1. La période antique, préhistoire du concept d'infini 112
5.1.1. L'infini chez Anaximandre 112
5.1.2. Le problème des irrationnels et les paradoxes de Zénon 113
5.1.3. Aristote et la double nature de l'infini 116
5.2. La naissance du calcul infinitésimal 118
5.2.1. Les écrits de Newton 119
5.2.2. L'apport de Leibniz 121
5.2.3. Impact du calcul sur la philosophie leibnizienne 125
5.2.3.1. Petites perceptions et différentielles 125
5.2.3.2. La matière et les vivants 129
5.2.3.3. L'image de l'ordre 130
5.2.4. Le problème épistémologique 137

Chapitre 6. Complexes, logarithmes et exponentielles 141

6.1. La marche vers les complexes 142
6.2. Logarithmes et exponentielles 145
6.3. Formules de De Moivre et d'Euler 148
6.4. Conséquences sur la philosophie hégélienne 150
6.5. La formule d'Euler 152
6.6. Euler, Diderot et l'existence de Dieu 153
6.7. L'approximation des fonctions 154
6.7.1. Formule de Taylor 155
6.7.2. Formule de Mac Laurin 155
6.8. Philosophie et mathématique chez Wroński 156
6.8.1. La « loi suprême » des mathématiques 158
6.8.2. Interprétation philosophique 162
6.9. Positivisme historique et métaphysique spiritualiste 163
6.9.1. La vision comtienne des mathématiques 163
6.9.2. La réaction de Renouvier 166
6.9.3. Les dérives spiritualistes 167
6.10. Intérêt physique des nombres complexes 168
6.11. Conséquences sur la philosophie bergsonienne 170

Partie 3. Les avancées significatives 175

Introduction de la partie 3 177

Chapitre 7. Hasard, probabilités et métaphysique 181

7.1. Le calcul des probabilités : brève histoire 182
7.2. Le « pari » de Pascal 186
7.2.1. Le texte du « pari » 186
7.2.2. La traduction formelle 187
7.2.3. Critiques et commentaires 188
7.2.3.1. La critique de Laplace 188
7.2.3.2. Une remarque d'Emile Borel 189
7.2.3.3. La théorie de la décision 190
7.2.3.4. Le cadre de l'analyse non-standard 191
7.3. Les applications sociales, de Condorcet à Musil 193
7.4. Coïncidences, hasard et omniscience 195

Chapitre 8. La révolution géométrique 199

8.1. Les limites de l'idéal démonstratif euclidien 200
8.2. La contestation de la géométrie euclidienne 203
8.3. Les géométries de Bolyai et Lobatchevsky 204
8.4. La géométrie elliptique de Riemann 212
8.5. Bachelard et la philosophie du « non » 214
8.6. L'unification de la géométrie par Beltrami et Klein 216
8.7. L'axiomatisation de Hilbert 219
8.8. La réception des géométries non euclidiennes 220
8.9. Un lointain impact : la philosophie de Finsler 220

Chapitre 9. Ensembles et structures fondamentales 223

9.1. Controverses sur l'infiniment grand 223
9.2. La notion de « puissance d'un ensemble » 227
9.2.1. Le « dénombrable » et le « continu » 228
9.2.2. La spécificité du continu 230
9.2.3. Hypothèse du continu et hypothèse du continu généralisée 232
9.3. Le développement de la théorie des ensembles 233
9.4. La voie épistémologique et les autres 239
9.5. La philosophie analytique et ses maîtres 242
9.6. Husserl avec Gödel ? 246
9.7. Annexe : la preuve ontologique de Gödel 247

Partie 4. L'avènement des mathématiciens philosophes 249

Introduction de la partie 4 251

Chapitre 10. L'essor de l'algèbre 255

10.1. L'« algèbre de Boole » et ses conséquences 256
10.2. Le début de l'algèbre générale 259
10.3. Théorie des groupes 260
10.4. Algèbre linéaire et algèbre non commutative 263
10.5. Un mathématicien philosophe : Clifford 267

Chapitre 11. Topologie et géométrie différentielle 275

11.1. Topologie 275
11.1.1. Continuité et voisinages 276
11.1.2. Quelques définitions et théorèmes fondamentaux 277
11.1.3. Propriétés des espaces topologiques 279
11.1.4. Philosophie des classifications *versus* topologie de l'être 284
11.2. Les modèles de la géométrie différentielle 284
11.2.1. L'espace comme support de la pensée 285
11.2.2. La notion générale de variété 286
11.2.3. Le concept formel de variété différentielle 286
11.2.4. La théorie générale des variétés différentielles 288
11.2.5. G-structures et connexions 289
11.3. Quelques conséquences philosophiques 291
11.3.1. Relativité et philosophie de Whitehead 292
11.3.2. L'œuvre singulière de Lautman 293
11.3.3. Thom et la théorie des catastrophes 296

Chapitre 12. Recherche mathématique et philosophie 303

12.1. Les différents domaines 303
12.2. Développement des mathématiques classiques 306
12.3. Théorie des nombres et algèbre 306
12.4. Géométrie et topologie algébrique 308
12.5. Catégories et faisceaux : des outils à visée globalisante 311
12.5.1. La théorie des catégories 311
12.5.2. La théorie des faisceaux 316
12.5.3. Lien avec la philosophie 319
12.5.4. Impact philosophique 319
12.6. La vision unitaire de Grothendieck 320
12.6.1. Les schémas 320
12.6.2. Les topos 321

12.6.3. Les motifs 323
12.6.4. Conséquences philosophiques des motifs 326

Conclusion 329

Bibliographie 335

Index 351