Avant-propos

La philosophie ne tombe pas du ciel, elle ne suit pas la ligne d'une réflexion parfaitement autonome ou d'une spéculation étrangère au monde. L'expérience montre que les problèmes, les concepts, les théories philosophiques naissent dans un certain contexte économique et politique, au voisinage de sources de sens qui relèvent de savoirs et de pratiques positives. C'est dans ces *lieux* que le philosophe, ordinairement, découvre les éléments inducteurs de sa pensée. C'est là, comme on dit, qu'il trouve sa vie. Un peu d'histoire permet alors souvent d'en reconstituer les éléments, qui parfois affleurent à la surface des textes, mais toujours les informent de l'intérieur : il suffit de les repérer. Ainsi la métaphysique, de Platon à Husserl et au-delà, a-t-elle largement bénéficié des avancées accomplies dans ce domaine essentiel de la connaissance que sont les mathématiques. Quels que soient les progrès et les révolutions que cette discipline ait connus, elle n'a cessé de fournir au philosophe non seulement des occasions de penser, mais des outils et des instruments pour la pensée.

C'est pourquoi il sera ici question du rapport que la philosophie entretient avec l'ensemble de la discipline mathématique, aujourd'hui un immense réservoir de structures, extrêmement raffinées et multiplement coordonnées. Nous examinerons les vicissitudes de ce rapport dans l'histoire, mais la question centrale pour nous sera surtout celle de savoir ce que nous pouvons actuellement tirer de cette discipline désormais si puissante et si complexe qu'elle échappe, le plus souvent, en grande partie, à la connaissance et à la compréhension du philosophe. En quoi les mathématiques contemporaines peuvent-elles servir la philosophie d'aujourd'hui ? Telle est la véritable question de ce livre qui ne relève donc ni de l'histoire de la philosophie, ni de l'histoire des sciences, moins encore de l'épistémologie.

Il ne s'agit pas pour nous, en effet, de nous interroger sur la science, ses méthodes, ses lois, son évolution ou son statut dans l'ensemble des savoirs, mais plus simplement de nous demander dans quelle mesure cette science peut encore aider aujourd'hui les philosophes à bâtir une nouvelle vision du monde et laquelle. Nous réclamons donc certainement au lecteur philosophe une inversion générale de sa pensée et le rejet de ses méthodes habituelles : plutôt que de mettre entre parenthèses le savoir scientifique et de partir en quête d'un hypothétique savoir autre, présumé plus remarquable, plus natif ou plus radical (méthode dite « phénoménologique »), nous préférons ici suspendre notre jugement, mettre en « épochè » la phénoménologie elle-même, et nous fier au seul savoir effectif qui constitue véritablement la raison – ou, en tout cas, une bonne partie de la raison – en acte : le savoir mathématique. En lui se résument en effet les développements et les transformations les plus remarquables, non seulement de la pensée mais du monde. Lui seul, en particulier, a la capacité d'élaborer, d'une façon méthodique et réfléchie, les architectures conceptuelles de base nécessaires à la fabrication des conceptions du monde. Il y a longtemps, semble-t-il, que le philosophe a perdu cette humilité élémentaire qui consistait à s'en remettre d'abord au seul savoir vérifié, au lieu d'élaborer, dans l'empiricité la plus aveugle, des théories et des dogmes qui ne tiennent souvent debout que le temps des modes, et dont l'histoire révèle l'insigne fragilité.

Ce faisant, nous nous situons dans une lignée de penseurs aujourd'hui plus ou moins oubliés, mais qui n'a cessé de répéter ce que nous affirmons. Gaston Milhaud, par exemple, avait déjà noté cette remarquable influence. Dans la leçon d'ouverture d'un cours professé à Montpellier en 1908-1909, publié par la suite dans la *Revue Philosophique* et repris dans un de ses ouvrages [MIL 11, p. 21–22], on trouve le texte suivant :

« Mon intention est de m'attacher à certains caractères essentiels de la pensée mathématique, et surtout de chercher quel a été son retentissement sur les conceptions, sur les doctrines des philosophes, ou même sur les tendances les plus générales de l'esprit humain.

Que ce retentissement ait été considérable, comment en douter lorsque l'histoire nous montre, souvent unies dans le même esprit, les spéculations mathématiques et la réflexion philosophique ; lorsque si souvent, depuis les pythagoriciens jusqu'à des penseurs tels que Descartes, Leibniz, Kant, Renouvier, pour ne parler que des morts, quelques-unes au moins des doctrines fondamentales sont appuyées sur l'idée qu'on se fait de la mathématique ; lorsque de tous côtés et à toutes les époques, nous voyons germer non pas seulement des vues critiques, mais même des systèmes portant sur les problèmes les plus difficilement accessibles de la métaphysique, et témoignant surtout, par les justifications qu'en offrent leurs auteurs, d'une sorte de vertige né du maniement ou simplement du contact des spéculations des géomètres ? L'excitation qu'y trouve l'esprit du penseur, loin d'être un accident dans l'histoire des idées, nous apparaît comme un fait continu et presque universel. »

Quelques années plus tard, en 1912, Léon Brunschvicg faisait paraître *Les étapes de la philosophie mathématique*, un livre dans lequel, comme le notait Jean-Toussaint Desanti dans la préface à la réédition de l'ouvrage en 1981, il apparaissait clairement que les mathématiques *informaient* la philosophie[1]. Dans cet ouvrage salué par Borel comme « un des plus puissants efforts jamais tenté par un philosophe pour s'assimiler une discipline aussi étendue que la science mathématique », on découvrait déjà, comme le rappelle Desanti, que « la lente émergence des formes de l'intelligibilité mathématique donnait la grille de lecture permettant d'interpréter l'histoire des philosophies » [BRU 81, p. VII]. Il reste que ces deux effets étaient secondaires par rapport au projet principal de Brunschvicg : rendre compte du discours mathématique lui-même dans ses noyaux opératoires, là où s'instaurent les formes de construction des objets intelligibles et où se manifestent principalement l'activité de jugement, si importante pour lui, et le dynamisme propre à l'intellect humain.

Certes, le temps n'est plus où la mathématique passait pour la vérité en soi. Ebranlée dans ses fondements, désormais perçue comme multiple sinon incertaine[2], elle a encore vu récemment sa pertinence se réduire : lorsque l'on sait que quatre-vingt quinze pour cent des vérités ne sont pas démontrables à l'intérieur de nos systèmes actuels et que les formules sont d'autant plus aléatoires qu'elles sont complexes[3], on peut douter de l'intérêt philosophique de la discipline. Aussi bien, la remarque terminale de Brunschvig selon laquelle « l'œuvre libre et féconde de la pensée date de l'époque où la mathématique vint apporter à l'homme la norme véritable de la vérité » [BRU 81, p. 577] peut-elle faire sourire. Son inspiration spinoziste ne semble plus de saison et le philosophe paresseux s'engouffrera avec délectation dans cette brèche.

Pourtant, même des maîtres récents – Jules Vuillemin, Gilles-Gaston Granger, Roshdi Rashed – en consacrant beaucoup de leurs travaux à la pensée mathématique et à ses conséquences philosophiques, n'ont pas suivi cette pente. S'ils nous sont souvent proches, c'est au sens où c'est bien de mesurer une influence, voire même un véritable *impact* de la mathématique sur la philosophie, qu'il s'agit en général dans leurs œuvres[4]. Aussi bien nous contenterons-nous ici, très modestement, de suivre leur trace. Ce texte va donc sans doute à contre-courant. Il rejoint pourtant certaines remarques de mathématiciens contemporains, d'ailleurs dans le sillage de Bachelard : « La vérité est que la science enrichit la philosophie et la renouvelle, plus que l'inverse »[5], écrivait Jean-Paul Delahaye au début des années 2000 [DEL 00, p. 95]. Au

1. J.-T. Desanti, préface à L. Brunschvicg [BRU 81, p. VI].

2. Voir le titre du livre de M. Kline [KLI 93].

3. Nous aurons l'occasion, à la fin du chapitre 7, de commenter ces résultats issus notamment des travaux de Gregory Chaitin.

4. Voir, par exemple, R. Rashed [RAS 91]. G.-G. Granger a parfois mis en évidence une influence en sens inverse, comme c'est le cas chez Leibniz où le principe philosophique de continuité détermine différents aspects de sa mathématique, mais c'est là, selon ses propres dires, un phénomène exceptionnel [GRA 86].

5. Dans la suite (p. 95-104), l'auteur énumère différentes conséquences philosophiques importantes des progrès de la théorie de la complexité de Kolmogorov et notamment de la définition

surplus, nous ne cherchons pas à étaler une culture inutile. Nous visons seulement à transmettre l'essentiel, c'est-à-dire – d'expérience d'enseignant – ce qui se perd le plus facilement. La plus grande partie du livre sera donc occupée à redémontrer que la raison philosophique, qui a subi sans doute maintes inflexions dans son histoire, ne se construit néanmoins qu'en regard des avancées correspondantes de la science, et notamment de cette discipline où se résument ses principales victoires : les mathématiques. Des Pythagoriciens aux philosophes post-modernes, rien d'important ne s'est jamais pensé sans cette référence quasi-constante.

Mettre en œuvre la philosophie d'aujourd'hui suppose la prise de conscience de cette trajectoire créative. Une fois cette tâche accomplie, demeurent évidemment bien des problèmes : cette philosophie d'aujourd'hui doit-elle suivre, si l'on en croit notre schéma, la même inspiration que les précédentes ? Peut-elle, sans se renier, échapper aux biais dans lesquels sont tombés les anciens penseurs systématiques ? Quelle forme, en définitive, doit prendre désormais la philosophie ? Voilà, parmi beaucoup d'autres, quelques questions qui forment l'enjeu de cette réflexion pour laquelle la mathématique, à notre sens, est toujours éminemment inspiratrice. L'histoire montre que les vrais philosophes n'ont pas toujours été ces agitateurs d'idées, ces critiques de la politique ou ces moralistes à la petite semaine qu'ils sont devenus, pour beaucoup, aujourd'hui, à la fois du fait de leur méconnaissance de la science et de la caisse de résonance que les médias apportent aux choses les plus insignifiantes, ce qui les incite eux-mêmes à ne parler que de cela. Mais l'existence de faits réels et de mouvements profonds, généralement ignorés de la bulle médiatique, laisse à penser que ce qui est important se passe ailleurs. La philosophie, n'en déplaise à Voltaire, c'était autre chose. Et, pour les gens sérieux, cela demeure une entreprise qui dépasse infiniment ce qu'en livrent désormais les gazettes et les magazines.

Ajoutons ici un dernier mot concernant nos notations. Lorsque nous évoquons les mathématiques de l'Antiquité, du Moyen Age ou de l'Age Classique – disons, pour faire court, les mathématiques du passé –, nous les avons, pour la clarté du propos, exprimées dans les notations d'aujourd'hui. Cependant, il faut savoir que les symboles que nous employons pour désigner les opérations arithmétiques usuelles n'ont, dans leur usage courant, que trois siècles d'existence environ [BRU 00, p. 57]. Ce n'est

de l'aléatoirité d'une suite comme incompressibilité algorithmique, d'où il a résulté : 1) une nouvelle compréhension des théorèmes d'incomplétude de Gödel ; 2) une conception objective de l'entropie physique (Zurek) ; 3) le nombre Omega de Chaitin et l'assurance de la cohérence de la théorie de la mesure ; 4) une nouvelle compréhension de l'induction scientifique, de la règle de Bayes et du rasoir d'Ockham ; 5) la distinction entre complexité aléatoire et complexité organisée (Bennett). Une dernière conséquence épistémologiquement non négligeable est la fameuse loi de Kreinovich et Longpré selon laquelle si un résultat mathématique est potentiellement utile, alors il n'est pas possible qu'il possède une preuve complexe. Il semble en résulter que ce qui est complexe est potentiellement inutile, résultat que feraient bien de méditer beaucoup de philosophes aux discours filandreux. Voir [KRE 00] et [LI 97].

qu'au début du XVII^e siècle, par exemple, que se répand l'emploi du signe « plus » (+), déformation de « et » (&), et du signe « moins » (–). Ces symboles seraient apparus en Italie vers 1480, mais, à l'époque, on écrivait plutôt « piu » et « meno », le « piu » étant souvent abrégé par un « p ». Au XVI^e siècle, en 1545 exactement, un certain Michael Stiffel (1487-1567) en vient à noter la multiplication par un « M » majuscule. Puis, en 1591, l'algébriste François Viète (1540-1603), un spécialiste des codes qui transcrivait le courrier secret d'Henri IV, remplace ce signe par « in ». Le symbolisme actuel de la croix ($\times$) ne sera introduit qu'en 1632 par William Oughtred (1574-1660), un homme d'église passionné de mathématiques. La notation du point (.), quant à elle, est due à Leibniz (1646-1716), qui l'utilise pour la première fois en 1698. C'est lui aussi qui généralise l'usage du signe d'égalité (=), apparu en 1557 chez Robert Recorde (1510 ?-1558) mais, par la suite, souvent écrit en toutes lettres en latin (*æqualitur*) ou, comme chez Descartes et nombre de ses contemporains, abrégé par un « alpha » renversé. Si la notion de racine carrée figure déjà sur une tablette babylonienne qui remonte approximativement aux années -1800 ou -1600 avant J.-C. (voir figure 1), sa représentation sous le signe que nous connaissons ($\sqrt{}$) n'est pas antérieure non plus au XVII^e siècle. Son usage dans les mathématiques précédentes n'est donc qu'une simplification et n'a pas de caractère historique. D'une façon générale, cet ouvrage n'est pas une histoire des mathématiques mais une étude de l'impact des idées mathématiques sur les représentations philosophiques en Occident au cours du temps, afin d'en dégager des enseignements pour l'époque présente.

Figure 1. *La tablette YBC 7289 (source : Yale Babylonian Collection)*