

Table des matières

| | |
|--|-----|
| Avant-propos | 9 |
| Chapitre 1. Equations différentielles ordinaires | 13 |
| 1.1. Bases de la théorie des équations différentielles ordinaires | 13 |
| 1.1.1. Existence-unicité pour les équations différentielles ordinaires du premier ordre | 13 |
| 1.1.2. Notion de solution maximale | 23 |
| 1.1.3. Cas des systèmes linéaires à coefficients constants | 29 |
| 1.1.4. Cas des équations différentielles d'ordre élevé | 33 |
| 1.1.5. Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites | 34 |
| 1.2. Simulation numérique des équations différentielles ordinaires, schémas d'Euler, notions de convergence, consistance et stabilité | 40 |
| 1.2.1. Introduction | 40 |
| 1.2.2. Notions fondamentales pour l'analyse des schémas numériques pour les EDO | 43 |
| 1.2.3. Analyse des schémas d'Euler explicite et implicite | 47 |
| 1.2.4. Schémas d'ordre plus élevé | 65 |
| 1.2.5. Equation de Leslie (théorème de Perron-Froebenius, méthode de la puissance) | 66 |
| 1.2.5.1. Modèle en temps discret | 67 |
| 1.2.5.2. Modèle en temps continu | 75 |
| 1.2.5.3. Démonstration du théorème de Perron-Froebenius | 82 |
| 1.2.5.4. Calcul de la valeur propre dominante | 89 |
| 1.2.6. Un modèle d'agglomération des globules rouges | 95 |
| 1.2.7. Modèle SEI | 105 |
| 1.2.8. Un problème de chimiotactisme | 113 |
| 1.3. Problèmes hamiltoniens | 119 |

| | |
|--|-----|
| 1.3.1. Le problème du pendule | 126 |
| 1.3.2. Matrices symplectiques, schémas symplectiques | 132 |
| 1.3.3. Problème de Kepler | 145 |
| 1.3.4. Résultats numériques | 150 |

Chapitre 2. Simulation numérique des équations aux dérivées partielles stationnaires : problèmes elliptiques 163

| | |
|--|-----|
| 2.1. Introduction | 163 |
| 2.1.1. Le problème modèle 1D, éléments de modélisation et d'analyse | 167 |
| 2.1.2. Un problème de transfert radiatif | 179 |
| 2.1.2.1. Unicité sous réserve d'existence | 181 |
| 2.1.2.2. Estimations <i>a priori</i> | 181 |
| 2.1.2.3. Existence de solutions | 182 |
| 2.1.2.4. Méthode de tir | 184 |
| 2.1.2.5. Interprétation comme problème de minimisation | 185 |
| 2.1.3. Eléments d'analyse pour les problèmes multidimensionnels | 188 |
| 2.2. Approximation par différences finies d'équations elliptiques | 191 |
| 2.2.1. Principes de discrétisation par différences finies | 191 |
| 2.2.2. Analyse du problème discret | 198 |
| 2.3. Approximation par volumes finis d'équations elliptiques | 207 |
| 2.3.1. Principes de discrétisation par volumes finis | 207 |
| 2.3.2. Coefficients discontinus | 213 |
| 2.3.3. Problèmes multidimensionnels | 216 |
| 2.4. Approximation par éléments finis d'équations elliptiques | 217 |
| 2.4.1. Approximation \mathbb{P}_1 en dimension 1 | 217 |
| 2.4.2. Approximation \mathbb{P}_2 en dimension 1 | 224 |
| 2.4.3. Eléments d'analyse des méthodes d'éléments finis, extension aux dimensions supérieures | 227 |
| 2.5. Comparaison numérique des méthodes DF, VF et EF | 232 |
| 2.6. Méthodes spectrales | 237 |
| 2.7. Equation de Poisson-Boltzmann, minimisation d'une fonctionnelle convexe, algorithme du gradient | 246 |
| 2.8. Conditions de Neumann : le point de vue de l'optimisation | 253 |
| 2.9. Répartition de charge sur une corde | 257 |
| 2.10. Le problème de Stokes | 264 |

Chapitre 3. Simulation numérique d'équations aux dérivées partielles : problèmes d'évolution 299

| | |
|---|-----|
| 3.1. Equations de diffusion | 299 |
| 3.1.1. Stabilité L^2 (analyse de Von Neumann) et stabilité L^∞ , convergence | 301 |
| 3.1.2. Schémas implicites | 309 |

| | |
|---|------------|
| 3.1.3. Discrétisation par éléments finis | 316 |
| 3.1.4. Illustrations numériques | 318 |
| 3.2. Des équations de transport vers les lois de conservation | 326 |
| 3.2.1. Introduction | 326 |
| 3.2.2. Equation de transport : méthode des caractéristiques | 330 |
| 3.2.3. Principes de décentrement : schéma <i>UpWind</i> | 334 |
| 3.2.4. Transport linéaire à vitesse constante, analyse de schémas DF et VF | 336 |
| 3.2.5. Simulations bidimensionnelles | 363 |
| 3.2.6. Dynamique de prolifération du prion | 366 |
| 3.2.6.1. Un modèle simplifié | 371 |
| 3.2.6.2. Distribution en tailles ; états stationnaires | 375 |
| 3.3. Equation des ondes | 383 |
| 3.4. Problèmes non linéaires : lois de conservation | 395 |
| 3.4.1. Lois de conservation scalaires | 395 |
| 3.4.1.1. Eléments d'analyse | 395 |
| 3.4.1.2. Schémas de Lax-Friedrichs et Rusjanov pour les lois de conservation scalaires | 408 |
| 3.4.1.3. Illustrations numériques | 416 |
| 3.4.1.4. Propagation d'un feu de forêt | 422 |
| 3.4.2. Systèmes de lois de conservation | 435 |
| 3.4.2.1. Introduction aux équations de la dynamique des gaz | 435 |
| 3.4.2.2. Schéma de Lax-Friedrichs et Rusjanov pour les équations d'Euler | 438 |
| 3.4.3. Schémas cinétiques | 443 |
| 3.4.3.1. Lois de conservation scalaires | 444 |
| 3.4.3.2. Schéma cinétique pour les équations d'Euler : cas monoatomique | 449 |
| Annexe A. Résolution de systèmes linéaires | 457 |
| Annexe B. Intégration numérique | 465 |
| Annexe C. Un lemme d'équivalence de Peetre-Tartar | 475 |
| Annexe D. Théorème de Schauder | 481 |
| Annexe E. Solutions élémentaires du laplacien en dimension 1 et 2 | 493 |
| Bibliographie | 497 |
| Index | 505 |