

# Table des matières

<b>Introduction</b> . . . . .	11
<b>Chapitre 1. Calcul vectoriel</b> . . . . .	13
1.1. Espace vectoriel . . . . .	13
1.1.1. Définition. . . . .	13
1.1.1.1. Propriétés de la loi de composition interne. . . . .	13
1.1.1.2. Propriétés de la loi de composition externe . . . . .	14
1.1.2. Espace vectoriel – Dimension – Base . . . . .	14
1.1.3. Espace affine. . . . .	15
1.2. Espace affine de dimension 3 – Vecteur libre. . . . .	15
1.3. Produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . . . . .	16
1.3.1. Propriétés du produit scalaire . . . . .	17
1.3.2. Carré scalaire – Vecteur unitaire . . . . .	18
1.3.3. Interprétation géométrique du produit scalaire . . . . .	18
1.3.4. Résolution de l'équation $\vec{a} \cdot \vec{x} = 0$ . . . . .	20
1.4. Produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$ . . . . .	20
1.4.1. Définition. . . . .	20
1.4.2. Interprétation géométrique du produit vectoriel . . . . .	21
1.4.3. Propriétés du produit vectoriel . . . . .	22
1.4.4. Résolution de l'équation $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{0}$ . . . . .	22
1.5. Produit mixte $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ . . . . .	23
1.5.1. Définition. . . . .	23
1.5.2. Interprétation géométrique du produit mixte . . . . .	23

- 1.5.3. Propriétés du produit mixte . . . . . 24
  - 1.5.3.1. Cas de nullité du produit mixte . . . . . 24
  - 1.5.3.2. Permutation circulaire des termes . . . . . 24
  - 1.5.3.3. Permutation de deux termes . . . . . 25
  - 1.5.3.4. Multiplication par un scalaire . . . . . 25
  - 1.5.3.5. Distributivité . . . . . 25
  - 1.5.3.6. Produit mixte d'une combinaison de vecteurs . . . . . 25
- 1.6. Calcul vectoriel dans l'espace affine de dimension 3 . . . . . 26
  - 1.6.1. Base orthonormée . . . . . 26
  - 1.6.2. Expression analytique du produit scalaire. . . . . 26
  - 1.6.3. Expression analytique du produit vectoriel . . . . . 27
  - 1.6.4. Expression analytique du produit mixte. . . . . 27
- 1.7. Applications du calcul vectoriel. . . . . 28
  - 1.7.1. Double produit vectoriel . . . . . 28
    - 1.7.1.1. Définition . . . . . 28
    - 1.7.1.2. Propriétés particulières du double produit vectoriel . . . . . 29
    - 1.7.1.3. Cas de nullité du double produit vectoriel . . . . . 30
    - 1.7.1.4. Projection d'un vecteur sur un plan . . . . . 30
  - 1.7.2. Résolution de l'équation  $\vec{a} \cdot \vec{x} = b$  . . . . . 31
  - 1.7.3. Résolution de l'équation  $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$  . . . . . 33
  - 1.7.4. Egalité de Lagrange. . . . . 34
  - 1.7.5. Equations de plans . . . . . 35
    - 1.7.5.1. Plan passant par un point et de normale donnée. . . . . 35
    - 1.7.5.2. Plan défini par deux vecteurs et passant par un point. . . . . 36
  - 1.7.6. Relations dans le triangle . . . . . 37
- 1.8. Vecteurs et changements de base . . . . . 38
  - 1.8.1. Convention d'Einstein . . . . . 38
  - 1.8.2. Tableau de passage de la base ( $e$ ) vers la base ( $E$ ). . . . . 39
  - 1.8.3. Caractérisation du tableau de passage . . . . . 41

**Chapitre 2. Torseurs et calcul torsoriel . . . . . 43**

- 2.1. Ensembles de vecteurs . . . . . 43
  - 2.1.1. Ensemble discret de vecteurs . . . . . 43
  - 2.1.2. Ensemble de vecteurs définis sur un continu . . . . . 44
- 2.2. Introduction aux torseurs . . . . . 45
  - 2.2.1. Définition. . . . . 45
  - 2.2.2. Equivalence de familles de vecteurs . . . . . 45
- 2.3. Algèbre des torseurs. . . . . 46
  - 2.3.1. Egalité de deux torseurs . . . . . 46

2.3.2. Combinaison linéaire de torseurs . . . . .	46
2.3.3. Torseur nul . . . . .	47
2.3.4. Torseur opposé . . . . .	47
2.3.5. Produit de deux torseurs . . . . .	48
2.3.6. Moment scalaire d'un torseur – Equiprojectivité . . . . .	48
2.3.7. Invariant scalaire d'un torseur . . . . .	50
2.4. Caractérisation et classification des torseurs . . . . .	50
2.4.1. Torseurs à résultante nulle . . . . .	50
2.4.1.1. Moment nul en un point – Torseur nul . . . . .	50
2.4.1.2. Moment non nul en un point – Torseur couple . . . . .	51
2.4.2. Torseurs à résultante non nulle . . . . .	51
2.4.2.1. Axe central d'un torseur . . . . .	52
2.4.2.2. Moment nul en un point – Torseur glisseur . . . . .	53
2.4.2.3. Torseur visseur . . . . .	53
2.5. Dérivation des torseurs . . . . .	54
2.5.1. Torseur dépendant d'un seul paramètre $q$ . . . . .	55
2.5.2. Torseur dépendant des $n$ paramètres $q_i$ fonctions de $p$ . . . . .	57
2.5.3. Torseur dépendant explicitement des $n+1$ paramètres . . . . .	58
<b>Chapitre 3. Dérivation des fonctions vectorielles . . . . .</b>	<b>61</b>
3.1. Vecteur dérivé – Définition et propriétés . . . . .	61
3.2. Dérivée d'une fonction dans une base . . . . .	62
3.3. Dérivation d'une fonction à valeur vectorielle d'une variable . . . . .	63
3.3.1. Relations entre dérivées d'une fonction dans des bases différentes . . . . .	63
3.3.1.1. Position du problème . . . . .	63
3.3.1.2. Taux d'orientation de deux bases . . . . .	65
3.3.1.3. Propriétés du vecteur ${}^q\delta(e, E)$ . . . . .	67
3.3.2. Forme différentielle d'orientation associée aux deux bases . . . . .	69
3.4. Dérivation d'une fonction à valeur vectorielle de deux variables . . . . .	70
3.5. Dérivation d'une fonction à valeur vectorielle de $n$ variables . . . . .	72
3.6. Cas de l'intervention explicite de la variable $p$ . . . . .	74
3.7. Taux de rotation relatif d'une base par rapport à une autre . . . . .	75
<b>Chapitre 4. Fonctions vectorielles d'une variable : courbes gauches. . . . .</b>	<b>77</b>
4.1. Fonction à valeur vectorielle d'une variable . . . . .	77
4.2. Tangente en un point M . . . . .	78

4.3. Vecteur unitaire tangent $\bar{r}(q)$ . . . . .	79
4.4. Vecteur unitaire normal principal $\bar{v}(q)$ . . . . .	81
4.5. Vecteur unitaire binormal $\bar{\beta}(q)$ . . . . .	82
4.6. Base de Frenet . . . . .	83
4.7. Abscisse curviligne . . . . .	84
4.8. Courbure, centre de courbure et rayon de courbure . . . . .	85
4.9. Torsion et rayon de torsion. . . . .	87
4.10. Orientation dans $(\lambda)$ de la base de Frenet . . . . .	88

**Chapitre 5. Fonctions vectorielles de deux variables : surfaces . . . . . 93**

5.1. Représentation d’une fonction à valeur vectorielle de deux variables . . . . .	93
5.1.1. Courbes coordonnées. . . . .	93
5.1.2. Point régulier ou singulier – Plan tangent – Vecteur unitaire normal . . . . .	95
5.1.3. Surfaces particulières. . . . .	97
5.1.3.1. Surfaces cylindriques . . . . .	97
5.1.3.2. Surfaces coniques . . . . .	98
5.1.3.3. Surfaces de révolution . . . . .	100
5.1.4. Surfaces réglées . . . . .	102
5.1.4.1. Plans remarquables d’une surface réglée . . . . .	102
5.1.4.2. Surfaces réglées non développables. . . . .	105
5.1.4.3. Surfaces réglées développables . . . . .	107
5.1.5. Element d’aire . . . . .	110
5.2. Propriétés générales des surfaces . . . . .	112
5.2.1. Première forme quadratique. . . . .	112
5.2.2. Trièdre de Darboux-Ribaucour . . . . .	114
5.2.2.1. Définition . . . . .	114
5.2.2.2. Propriétés du trièdre de Darboux-Ribaucour. . . . .	116
5.2.3. Deuxième forme quadratique . . . . .	118
5.2.4. Théorèmes de Meusnier . . . . .	120
5.2.5. Torsion géodésique . . . . .	122
5.2.6. Courbes remarquables tracées sur une surface . . . . .	124
5.2.6.1. Lignes de courbure . . . . .	124
5.2.6.2. Lignes asymptotiques . . . . .	124
5.2.6.3. Lignes géodésiques. . . . .	125
5.2.7. Directions et courbures principales d’une surface . . . . .	125
5.2.7.1. Première forme bilinéaire . . . . .	125

5.2.7.2. Courbures normales extrémales . . . . .	127
5.2.7.3. Directions et courbures principales . . . . .	127
5.2.7.4. Deuxième forme bilinéaire . . . . .	128
5.2.7.5. Propriétés des directions principales . . . . .	129
<b>Chapitre 6. Fonctions vectorielles de trois variables : volumes . . . . .</b>	<b>133</b>
6.1. Fonctions à valeur vectorielle de trois variables . . . . .	133
6.1.1. Surfaces coordonnées . . . . .	133
6.1.2. Courbes coordonnées. . . . .	134
6.1.3. Coordonnées curvilignes orthogonales . . . . .	134
6.1.3.1. Définition . . . . .	134
6.1.3.2. Base orthonormée locale associée . . . . .	134
6.2. Element de volume . . . . .	135
6.2.1. Définition. . . . .	135
6.2.2. Applications aux systèmes de coordonnées classiques . . . . .	136
6.2.2.1. Coordonnées cartésiennes . . . . .	136
6.2.2.2. Coordonnées cylindro-polaires. . . . .	136
6.2.2.3. Coordonnées sphériques. . . . .	136
6.3. Taux de rotation de la base locale. . . . .	137
6.3.1. Calcul du taux de rotation partiel $\overline{1}\delta(\lambda, e)$ . . . . .	138
6.3.2. Calcul du taux de rotation . . . . .	140
<b>Chapitre 7. Opérateurs linéaires . . . . .</b>	<b>143</b>
7.1. Définition . . . . .	143
7.2. Propriétés intrinsèques . . . . .	143
7.3. Algèbre des opérateurs linéaires . . . . .	144
7.3.1. Opérateur unité . . . . .	144
7.3.2. Egalité de deux opérateurs linéaires . . . . .	145
7.3.3. Produit d'un opérateur linéaire par un scalaire . . . . .	145
7.3.4. Somme de deux opérateurs linéaires. . . . .	145
7.3.5. Multiplication de deux opérateurs linéaires. . . . .	146
7.4. Forme bilinéaire . . . . .	147
7.5. Opérateur symétrique . . . . .	147
7.6. Forme quadratique. . . . .	148
7.7. Opérateur linéaire et changement de base . . . . .	148

7.8. Exemples d'opérateurs linéaires. . . . .	149
7.8.1. Opération $\vec{f} = \vec{a} \wedge \vec{F}$ . . . . .	149
7.8.2. Opération $\vec{f} = \vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{F})$ . . . . .	150
7.8.3. Opération $\vec{f} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{F})$ . . . . .	150
7.8.4. Opération $\vec{f} = \vec{a} \wedge (\vec{F} \wedge \vec{a})$ . . . . .	152
7.9. Rotation vectorielle $\mathcal{R}_{\vec{u}, \alpha}$ . . . . .	153
7.9.1. Expression de la rotation vectorielle . . . . .	153
7.9.2. Quaternion associé à la rotation vectorielle $\mathcal{R}_{\vec{u}, \alpha}$ . . . . .	156
7.9.3. Représentation matricielle de la rotation vectorielle . . . . .	156
7.9.4. Changement de base et rotation vectorielle . . . . .	158
<b>Chapitre 8. Homogénéité et dimension . . . . .</b>	<b>161</b>
8.1. Notion d'homogénéité . . . . .	161
8.2. Dimension . . . . .	161
8.3. Dimensions usuelles en mécanique . . . . .	162
8.4. Utilisation des équations aux dimensions . . . . .	163
<b>Liste des notations . . . . .</b>	<b>165</b>
<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>169</b>
<b>Index . . . . .</b>	<b>171</b>
<b>Sommaire d'Equations du mouvement 1 . . . . .</b>	<b>177</b>