

Table des matières

| | |
|---|----|
| Introduction | 11 |
| Chapitre 1. Situation des solides | 15 |
| 1.1. Notion de repère | 15 |
| 1.2. Repère de référence ou référentiel | 16 |
| 1.2.1. Constitution d'un référentiel | 16 |
| 1.2.1.1. Choix des éléments d'un référentiel. | 16 |
| 1.2.1.2. Unités de mesure | 17 |
| 1.2.1.3. Repère normé | 18 |
| 1.2.1.4. Repère orthogonal | 18 |
| 1.2.1.5. Repère orthonormé direct : propriétés | 20 |
| 1.2.1.6. Formulation symbolique | 21 |
| 1.2.2. Les différents types de référentiels. | 22 |
| 1.2.2.1. Référentiel galiléen. | 24 |
| 1.2.2.2. Référentiel pseudo-galiléen. | 25 |
| 1.2.2.3. Repère local quelconque | 26 |
| 1.3. Situation d'un solide | 26 |
| 1.3.1. Principe de repérage d'un solide | 27 |
| 1.3.2. Paramètres de situation d'un solide | 27 |
| 1.3.3. Coordonnées du vecteur-position. | 28 |
| 1.3.3.1. Coordonnées cartésiennes x, y, z | 28 |
| 1.3.3.2. Coordonnées cylindriques ou cylindro-polaires r, α, z | 29 |
| 1.3.3.3. Coordonnées sphériques R, α, β | 30 |
| 1.3.3.4. Coordonnées générales | 32 |
| 1.3.4. Exercices d'application | 33 |

| | |
|---|----|
| 1.3.4.1. Exercice 1 – Systèmes de coordonnées | 33 |
| 1.3.4.2. Exercice 2 – Systèmes de coordonnées | 34 |
| 1.4. Positionnement d'un repère lié à un solide | 34 |
| 1.4.1. Quelques exemples de repères de situation | 34 |
| 1.4.1.1. Le repère cartésien | 35 |
| 1.4.1.2. Le repère cylindro-polaire | 35 |
| 1.4.1.3. Le repère sphérique | 35 |
| 1.4.1.4. Le trièdre de Frenet | 36 |
| 1.4.1.5. Le trièdre de Darboux-Ribaucour | 37 |
| 1.4.2. Paramètres généraux de repérage. | 38 |
| 1.4.3. Angles d'Euler. | 40 |
| 1.4.4. Changements de base dans la représentation d'Euler | 41 |
| 1.4.4.1. Première rotation d'angle ψ , ou précession | 42 |
| 1.4.4.2. Deuxième rotation d'angle θ , ou nutation | 44 |
| 1.4.4.3. Troisième rotation d'angle ϕ , ou rotation propre | 45 |
| 1.4.4.4. Relation entre les bases (λ) et (S) | 46 |
| 1.4.5. Exercices d'application | 47 |
| 1.4.5.1. Exercice 3 – Angles d'Euler | 47 |
| 1.4.5.2. Exercice 4 – Angles d'Euler | 51 |
| 1.5. Rotation vectorielle $\mathcal{R}_{\vec{u},\alpha}$ | 54 |
| 1.5.1. Exercices d'application | 57 |
| 1.5.1.1. Exercice 5 – Rotation vectorielle | 57 |
| 1.5.1.2. Exercice 6 – Rotation vectorielle | 58 |
| 1.6. Autres exercices d'application. | 60 |
| 1.6.1. Exercice 7 – Repérage d'un avion – Angles d'Euler | 60 |
| 1.6.2. Exercice 8 – Rotation vectorielle | 63 |
| 1.6.3. Exercice 9 – Rotation vectorielle | 65 |
| 1.6.4. Exercice 10 – Rotation vectorielle | 68 |

Chapitre 2. Cinématique des solides 71

| | |
|--|----|
| 2.1. Généralités sur les solides en mouvement | 71 |
| 2.1.1. Notion de système matériel indéformable. | 71 |
| 2.1.2. Notion de temps. | 72 |
| 2.1.3. Eléments de cinématique du solide. | 72 |
| 2.2. Cinématique du point matériel. | 73 |
| 2.2.1. Vecteur-position. | 73 |
| 2.2.2. Trajectoire d'un point matériel dans un référentiel | 74 |
| 2.2.3. Vitesse d'un point matériel dans un référentiel | 75 |
| 2.2.4. Composantes du vecteur-vitesse ou vitesse. | 76 |
| 2.2.4.1. Vitesse en coordonnées cartésiennes | 76 |

| | |
|---|-----|
| 2.2.4.2. Vitesse en coordonnées cylindro-polaires | 76 |
| 2.2.4.3. Vitesse en coordonnées sphériques | 77 |
| 2.2.4.4. Vitesse en coordonnées généralisées | 78 |
| 2.2.5. Dérivée d'un vecteur dans une base | 78 |
| 2.2.5.1. Application à la base locale. | 80 |
| 2.2.5.2. Introduction du vecteur taux de rotation | 81 |
| 2.2.6. Vecteur-accélération d'un point matériel dans un référentiel | 82 |
| 2.2.6.1. Définition | 82 |
| 2.2.6.2. Accélération en coordonnées cartésiennes | 82 |
| 2.2.6.3. Accélération en coordonnées cylindro-polaires | 82 |
| 2.2.6.4. Accélération en coordonnées sphériques | 83 |
| 2.2.6.5. Accélération en coordonnées généralisées | 85 |
| 2.2.7. Exercices d'application | 86 |
| 2.2.7.1. Exercice 11 – Développante d'un cercle | 86 |
| 2.2.7.2. Exercice 12 – Cycloïde | 89 |
| 2.3. Champ de vitesse associé au mouvement d'un solide indéformable | 92 |
| 2.3.1. Formule fondamentale de la vitesse | 93 |
| 2.3.2. Utilisation de la notation matricielle. | 94 |
| 2.3.3. Torseur distributeur des vitesses | 96 |
| 2.3.4. Torseurs distributeurs partiels. | 96 |
| 2.4. Champ d'accélération d'un solide indéformable | 98 |
| 2.4.1. Dérivée par rapport au temps du taux de rotation | 98 |
| 2.4.2. Dérivation d'un vecteur du solide | 98 |
| 2.4.3. Formule fondamentale de l'accélération | 99 |
| 2.4.4. Notation matricielle du produit vectoriel | 99 |
| 2.4.5. Exercices d'application | 100 |
| 2.4.5.1. Exercice 13 – Cinématique d'un solide articulé. | 100 |
| 2.4.5.2. Exercice 14 – Cinématique d'un système articulé | 104 |
| 2.5. Mouvement plan sur plan d'un solide | 108 |
| 2.5.1. Position du problème. | 108 |
| 2.5.2. Centre instantané de rotation | 110 |
| 2.5.3. Roulante et base du mouvement | 112 |
| 2.5.4. Déplacement du centre instantané de rotation sur la base et la roulante | 112 |
| 2.5.5. Interprétation physique des notions de base et roulante. | 114 |
| 2.5.6. Exercices d'application | 114 |
| 2.5.6.1. Exercice 15 – Mouvement plan sur plan d'un solide | 114 |
| 2.5.6.2. Exercice 16 – Mouvement plan sur plan d'un système. | 117 |
| 2.6. Composition des mouvements avec un référentiel mobile | 121 |
| 2.6.1. Position du problème. | 122 |

| | |
|---|-----|
| 2.6.2. Trajectoire d'un point matériel dans les différents repères | 122 |
| 2.6.3. Composition des vitesses | 123 |
| 2.6.3.1. Formulation générale de la composition des vitesses | 124 |
| 2.6.3.2. Propriétés du torseur distributeur relatif des vitesses $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \end{matrix} \right\}$ | 124 |
| 2.6.3.3. Composition des vitesses dans une succession de repères | 126 |
| 2.6.4. Composition des accélérations | 127 |
| 2.6.4.1. Formulation générale | 128 |
| 2.6.4.2. Identification des différents termes d'accélération | 128 |
| 2.6.4.3. Interprétation de l'accélération de Coriolis. | 129 |
| 2.6.4.4. Propriétés de la composition des accélérations | 130 |
| 2.6.5. Exercices d'application | 131 |
| 2.6.5.1. Exercice 17 – Composition des mouvements | 131 |
| 2.6.5.2. Exercice 18 – Composition des mouvements | 135 |
| 2.7. Mouvement relatif de deux solides indéformables en contact | 144 |
| 2.7.1. Position du problème | 144 |
| 2.7.2. Torseurs distributeurs des vitesses | 144 |
| 2.7.3. Caractérisation des mouvements | 145 |
| 2.7.3.1. Taux de pivotement et taux de roulement | 145 |
| 2.7.3.2. Vitesse de pénétration normale et vitesse de glissement | 146 |
| 2.7.4. Nature du contact entre (S_1) et (S_2) | 146 |
| 2.7.4.1. Interprétation générale. | 146 |
| 2.7.4.2. Roulement sans glissement | 147 |
| 2.7.5. Exercices d'application | 148 |
| 2.7.5.1. Exercice 19 – Mouvement relatif de deux solides | 148 |
| 2.7.5.2. Exercice 20 – Solides en contact ponctuel | 150 |
| 2.8. Autres exercices d'application. | 157 |
| 2.8.1. Exercice 21 – Mouvement plan sur plan | 157 |
| 2.8.2. Exercice 22 – Composition des mouvements. | 162 |
| 2.8.3. Exercice 23 – Cinématique du contact dans un système | 170 |

Chapitre 3. Cinétique des solides 177

| | |
|--|-----|
| 3.1. Masse d'un ensemble mécanique continu (\mathcal{D}) | 177 |
| 3.1.1. Notion de mesure sur un ensemble mécanique continu. | 177 |
| 3.1.2. Volume et masse d'un ensemble mécanique continu | 178 |
| 3.2. Centre de mesure de μ sur (\mathcal{D}) | 178 |
| 3.2.1. Définition. | 178 |
| 3.2.2. Unicité du centre de mesure. | 179 |
| 3.2.3. Centre de mesure de deux ensembles disjoints. | 180 |

| | |
|---|-----|
| 3.2.4. Coordonnées du centre de mesure dans un repère $\langle \lambda \rangle$ | 181 |
| 3.3. Interprétation de la notion de centre de mesure. | 182 |
| 3.4. Torseur cinétique d'un ensemble mécanique (\mathcal{D}) | 182 |
| 3.4.1. Définition – Quantité de mouvement | 182 |
| 3.4.2. Torseur cinétique $\{p_S^\lambda\}$ d'un solide indéformable | 184 |
| 3.4.3. Opérateur d'inertie $I_{O_S}(S m)$ | 185 |
| 3.4.3.1. Développement matriciel de l'opérateur d'inertie. | 185 |
| 3.4.3.2. Propriété de l'opérateur d'inertie – Théorème d'Huygens. | 188 |
| 3.4.3.3. Exercice 24 – Eléments d'inertie d'un solide | 190 |
| 3.4.4. Torseur cinétique et changement de base | 194 |
| 3.5. Torseur dynamique d'un ensemble mécanique (\mathcal{D}) | 195 |
| 3.5.1. Définition. | 195 |
| 3.5.2. Torseur dynamique d'un solide indéformable (S) | 196 |
| 3.5.2.1. Relation entre torseur cinétique et torseur dynamique | 197 |
| 3.5.2.2. Torseur dynamique et changement de base | 201 |
| 3.6. Energie cinétique d'un ensemble mécanique (\mathcal{D}) | 203 |
| 3.6.1. Définition. | 203 |
| 3.6.2. Energie cinétique d'un solide libre indéformable (S) | 203 |
| 3.6.2.1. Expression de l'énergie cinétique, force vive | 204 |
| 3.6.2.2. Expression torsorielle de l'énergie cinétique. | 205 |
| 3.6.2.3. Décomposition de l'expression de l'énergie cinétique. | 205 |
| 3.6.3. Dérivées de l'énergie cinétique – Lagrangien | 208 |
| 3.6.3.1. Dérivée d'un produit scalaire. | 209 |
| 3.6.3.2. Dérivée d'un produit de torseurs. | 210 |
| 3.6.3.3. Dérivée de $T^{(\lambda)}(S)$ par rapport au temps | 211 |
| 3.6.3.4. Dérivée par rapport à la dérivée temporelle q'_α | 212 |
| 3.6.3.5. Dérivée par rapport à q_α | 212 |
| 3.6.3.6. Dérivée temporelle de l'énergie cinétique – Lagrangien. | 217 |
| 3.6.4. Exercices d'application | 217 |
| 3.6.4.1. Exercice 25 – Cinématique et cinétique d'un solide | 217 |
| 3.6.4.2. Exercice 26 – Eléments de dynamique | 225 |
| 3.6.5. Energie cinétique d'un solide lié | 231 |
| 3.7. Partition d'un ensemble mécanique continu (\mathcal{D}) | 233 |

| | |
|-------------------------------------|------------|
| Liste des symboles | 235 |
|-------------------------------------|------------|

| | |
|--------------------------------|------------|
| Bibliographie | 241 |
|--------------------------------|------------|

| | |
|------------------------|------------|
| Index | 243 |
|------------------------|------------|