Avant-propos

La méthode de plongement invariant (*invariant embedding* en anglais) est archétypique de la démarche scientifique. Dans une première phase analytique, elle consiste à étudier des composantes élémentaires du problème considéré. Puis en étudiant les relations que ces éléments entretiennent entre eux, une seconde phase synthétique permet d'accéder à la résolution du problème. Elle est bien connue en théorie du contrôle optimal où elle a été introduite par R. Bellman. Dans ce contexte, on note t le temps, u l'état du système considéré et v le contrôle. La méthode consiste à plonger un problème de contrôle optimal défini sur un horizon temporel $[0, T]$ (où T peut être fini ou infini) dans une famille de problèmes de même nature définis sur $[t, T], 0 \leq t \leq T$ en se donnant de plus un état initial arbitraire u_t au temps t. Soit t l'instant présent et u_t l'état actuel mesuré. Le plongement invariant consiste à considérer deux instants voisins t et $t + \delta t$ et à exprimer que l'état évolue en suivant l'équation d'état entre ces instants mais que les trajectoires doivent être optimales sur $[t, T]$ et sur $[t + \delta t, T]$. Cela permet d'écrire une équation sur la valeur optimale du critère en fonction de t et permet de fournir non plus simplement le contrôle optimal en « boucle ouverte » $v^\star(t)$ minimisant la fonctionnelle objectif en supposant que l'état vérifiera exactement à chaque instant l'équation d'état, mais aussi le contrôle optimal « en boucle fermée » $v^\star(t, u_t)$ qui donne le meilleur contrôle à appliquer au système à l'instant t connaissant son état actuel u_t et en supposant qu'il n'y aura pas de perturbations dans le futur. Lorsque ce calcul est possible, c'est le contrôle en boucle fermée qui est préféré par les automaticiens car il est beaucoup plus stable. Cette méthode a été développée par R. Bellman et ses élèves (voir en particulier [BEL 57a]).

L'idée que nous développons dans cet ouvrage consiste à reprendre le principe de cette méthode du plongement invariant et à l'appliquer à la résolution des problèmes aux limites elliptiques linéaires mais spatialement : partant d'un problème défini dans un domaine Ω, on définit une famille de problèmes de même nature sur des sous-domaines $\Omega_s \subset \Omega$ indicés par un paramètre s variant par exemple de 0 à 1, de telle sorte que $\Omega_s \subset \Omega_{s'}$ pour $s < s'$ et $\Omega_1 = \Omega$. L'ensemble Ω_0 est de mesure nulle et peut être ou non une partie du bord Γ de Ω. La frontière « mobile » Γ_s

de Ω_s, c'est-à-dire la partie de la frontière de Ω_s qui n'appartient pas à la frontière de Ω, balaye l'ensemble du domaine Ω quand s varie de 0 à 1. Pour que les sous-problèmes soient bien définis, il faut se donner une condition aux limites sur Γ_s. Sa valeur est arbitraire comme pour le plongement invariant en théorie du contrôle on se donne un état présent arbitraire. Dans le cadre du contrôle optimal de systèmes linéaires et d'un coût quadratique, le plongement invariant permet de définir un opérateur linéaire reliant l'état présent à l'état adjoint optimal au même instant. Cet opérateur vérifie une équation de Riccati. Dans notre approche, nous allons faire apparaître un opérateur semblable reliant une condition aux limites sur la frontière variable Γ_s à une autre condition complémentaire, typiquement les conditions de Dirichlet et de Neumann. Cet opérateur vérifie aussi une équation de Riccati. Pour le contrôle optimal, le procédé de plongement invariant aboutit à une équation de Riccati pour l'opérateur état-état adjoint qui ne dépend que de la nature du problème de contrôle et à une équation d'évolution sur un résidu qui prend en compte les données particulières du problème. Le contrôle optimal est ensuite obtenu, connaissant la mesure de l'état présent du système, par une relation affine utilisant cet opérateur et ce résidu. De façon similaire, notre approche de plongement invariant pour les problèmes aux limites elliptiques linéaires permet de transformer ce problème où la solution en tout point du domaine dépend de l'ensemble des données (second membre dans tout le domaine et conditions aux limites sur l'ensemble de la frontière) en deux problèmes de Cauchy découplés de nature parabolique : l'un sur le résidu à résoudre dans le sens du plongement et l'autre à résoudre ensuite dans le sens rétrograde donnant la solution du problème aux limites initial. Ces deux problèmes dépendent des données du problème aux limites. Ils utilisent un opérateur de type Dirichlet-Neumann qui satisfait une équation de Riccati et qui est indépendant des données et dépend seulement de l'opérateur du problème elliptique, de la géométrie du problème et de la définition du plongement invariant. C'est cette tranformation du problème aux limites initial en deux problèmes de Cauchy à résoudre successivement que nous appelons « factorisation du problème aux limites ». Il ne s'agit pas d'une factorisation de l'opérateur elliptique, mais bien du problème aux limites car le problème factorisé vérifie bien les conditions aux bords.

Notre recherche a débuté avec l'article de Henry et Yvon [HEN 96] dans lequel était étudié le contrôle par une condition au bord d'un problème aux limites elliptique. C'est ce problème qui nous a conduit à mettre en œuvre un plongement invariant spatial qui se conjugue avec celui du contrôle optimal. En fait l'idée du plongement invariant spatial avait déjà été utilisée par R. Bellman et ses collaborateurs pour des problèmes aux limites elliptiques, essentiellement dans des domaines rectangulaires [ANG 71a]. Ces recherches ont ensuite été développées dans une série de papiers par E. Angel et divers collaborateurs. Dans [ANG 68a], le plongement invariant est appliqué à un problème aux limites pour une équation de Laplace dans un rectangle, puis étendu à des régions moins régulières. Le problème est discrétisé par différences finies. Nous développons ce point de vue au chapitre 5. Dans [ANG 69], il donne une méthode pour construire la solution d'un problème aux limites dans un domaine composite connaissant les solutions sur les sous-domaines. Le papier [ANG 68b] présente une comparaison entre le plongement invariant appliqué à un problème complètement discrétisé par différences finies et un plongement invariant continu appliqué au problème discrétisé uniquement par rapport à la variable transversale. R. Kalaba étudie dans [ANG 70b] la possibilité d'une factorisation n'utilisant qu'un seul balayage. Dans [ANG 70a], un lien est établi entre un système de deux équations d'évolution (discrétisées) en sens opposés et couplées, et un problème aux limites écrit sous forme d'un problème aux deux bouts. Le papier [COL 71] présente une méthode numérique dite de décomposition diagonale qui permet une résolution itérative de l'équation de Riccati utilisant des matrices de taille réduite. Les aspects numériques sont repris dans [ANG 71b]. Il est proposé de coupler la méthode numérique directe qui résulte du plongement invariant avec une méthode itérative. Dans [ANG 86] l'utilisation de la méthode de Fourier rapide est introduite. On peut aussi trouver dans [JAI 75] la description d'une méthode de résolution par plongement invariant pour un problème elliptique faiblement non linéaire dans un domaine 2D quelconque. La non-linéarité est traitée par la méthode de quasi-linéarisation. Enfin, [ANG 94] montre l'utilisation de la méthode de factorisation dans un cadre de calcul parallèle. En remontant dans le temps on trouve une étude de Hadamard [HAD 10] sur la variation de la fonction de Green d'un problème aux limites due à un déplacement du bord. Cette étude fait intervenir une équation différentielle avec termes quadratiques très semblable à l'équation de Riccati de notre approche. Il ne semble pas cependant que la méthode du plongement invariant spatial ait été très étudiée sur le plan théorique.

Dans cet ouvrage, nous cherchons à explorer le domaine d'utilisation de cette méthode. Pour la simplicité de l'exposé, nous avons proposé un « cas modèle » particulièrement simple : il s'agit d'un problème aux limites où l'opérateur est le laplacien et le domaine est un cylindre. Cette géométrie cylindrique rappelle la situation du contrôle d'un problème d'évolution (cylindre par rapport au temps) et permet un plongement invariant simple et naturel par rapport à l'axe du cylindre. De plus, on prend dans ce cas modèle des conditions aux limites qui facilitent la détermination des conditions initiales du problème factorisé. Le calcul formel de factorisation très simple sur le cas modèle est présenté au chapitre 1. On s'attache dans la suite de l'ouvrage à montrer comment la méthode s'applique dans des situations plus complexes.

Le chapitre 1 présente donc le cas modèle et le calcul formel menant à sa factorisation. Ce calcul n'est que formel car la dérivation par rapport au paramètre s du plongement invariant n'est pas justifiée à ce niveau. Deux factorisation sont présentées : l'une utilise l'opérateur Dirichlet-Neumann sur la frontière mobile, alors que l'autre utilise l'opérateur Neumann-Dirichlet correspondant au domaine complémentaire et pour une frontière se déplaçant en sens inverse. Ces deux opérateurs vérifient des équations de Riccati qui ont entre elles le même rapport que les équations de Riccati du contrôle et du filtrage. Ce chapitre donne aussi un plongement invariant pour le cas modèle qui démarre d'une section intérieure du cylindre : c'est un exemple d'une situation où Ω_0 n'est pas un sous-ensemble du bord de Ω.

Le chapitre 2 présente une justification des calculs menés au chapitre 1 en utilisant la méthode de Galerkin : l'espace des fonctions définies sur la section du cylindre est approché par des sous-espaces de dimension finie formés à partir des fonctions propres du laplacien sur cette section. C'est la méthode utilisée par J.-L. Lions dans [LIO 68a] pour justifier l'obtention de l'équation de Riccati du contrôle pour des systèmes paraboliques. Ces résultats ne peuvent pas s'appliquer directement au cas modèle car l'opérateur Dirichlet-Neumann n'est pas borné contrairement à l'opérateur état-état adjoint pour le contrôle. La question se pose donc de donner un sens au terme P^2 de l'équation de Riccati. Cette méthode de justification des calculs du plongement invariant peut probablement s'adapter aux diverses situations étudiées dans la suite du livre. Mais l'exposé risquerait alors d'être très répétitif et très lourd car des développements techniques sont nécessaires pour l'adaptation à chaque situation. Nous avons donc choisi d'en rester à des calculs de dérivation formels dans les chapitres suivants à l'exception du chapitre 4 où l'explicitation des liens avec des problèmes de contrôle optimal pour des systèmes paraboliques fournit une autre voie de justification du plongement invariant.

Dans le chapitre 3, des généralisations sont apportées par rapport aux conditions aux limites utilisées dans le cas modèle. Dans ce but nous présentons une nouvelle façon de mener le plongement invariant basée sur la formulation variationnelle du problème aux limites. Des relations sont établies entre l'opérateur utilisé pour la factorisation et l'opérateur de Steklov-Poincaré. Le lien est fait avec les fonctions de Green et la formule de Hadamard pour une variation du domaine.

Au chapitre 4, nous montrons que le cas modèle peut être vu comme un problème de contrôle optimal d'un problème d'évolution qui a comme variable « temporelle » l'abscisse le long de l'axe du cylindre. L'équation d'état est un simple intégrateur. Nous rappelons des résultats obtenus par J.-L. Lions dans [LIO 68a] pour le contrôle des systèmes paraboliques. Une régularisation parabolique de l'équation d'état du cas modèle permet d'utiliser directement ces résultats. Nous étudions ensuite la convergence du problème régularisé vers le problème initial.

Le chapitre 5 permet de jeter un autre regard sur la méthode du plongement invariant appliqué à la factorisation des problèmes aux limites. Nous considérons une discrétisation par différences finies du cas modèle, adaptée à la géométrie cylindrique du domaine. L'analogue discret de la méthode de plongement invariant est appliqué à ce problème discrétisé. Le résultat est que le problème factorisé discret obtenu est exactement celui découlant d'une factorisation LU de Gauss (ou de Cholesky) par blocs de la matrice du problème discrétisé. Ce résultat reste vrai pour d'autres méthodes de discrétisation. Il permet donc de voir la factorisation par plongement invariant du problème aux limites initial comme une factorisation de Gauss « en continu » : comme la factorisation de Gauss permet de transformer le système linéaire initial en deux systèmes triangulaires (supérieur et inférieur) à résoudre successivement « en descente » et « en remontée », la méthode proposée ici transforme le problème aux limites en deux problèmes de Cauchy à résoudre successivement dans des directions opposées. De plus, d'autres discrétisations du système factorisé donnent lieu à d'autres schémas numériques. Nous montrons par ailleurs dans l'annexe que la factorisation de Gauss peut s'obtenir par une méthode de plongement invariant. Ce résultat montre la puissance de la méthode du plongement invariant et permet de donner un autre éclairage à l'ensemble de cet ouvrage. De plus, cette présentation rend très naturelle la condition bien connue pour que la méthode de Gauss sans permutation puisse être menée à son terme qui est que chaque sous-matrice principale doit être non singulière. En effet, ceci est une condition nécéssaire pour le plongement invariant.

Aux chapitres 6 et 7, nous nous attachons à montrer que la méthode de factorisation n'est pas liée à l'opérateur laplacien ni au domaine cylindrique comme dans le cas modèle. Au chapitre 6 nous commençons par étudier un problème aux limites avec un opérateur elliptique général du second ordre. Dans ce cas apparaissent des termes linéaires supplémentaires dans l'équation de Riccati pour l'opérateur Dirichlet-Neumann. Nous étudions ensuite un système de deux équations elliptiques couplées. Selon la manière dont le plongement est conduit plusieurs découplages peuvent être obtenus : si le plongement porte à la fois sur les deux inconnues on obtient une équation de Riccati portant sur la matrice d'opérateurs reliant les deux conditions de Dirichlet aux deux conditions de Neumann ; si le plongement porte successivement sur l'une puis l'autre des inconnues l'équation permettant le découplage est plus complexe et comporte en particulier des noyaux couplant deux sections. Mais dans ce dernier cas la méthode permet l'élimination exacte d'une inconnue. On retrouve à nouveau le lien avec la méthode de Gauss. On applique ensuite la méthode aux équations de l'élasticité linéaire. Le rôle particulier joué par la variable d'espace qui dirige le plongement nécessite une transformation préalable de ces équations avant la mise en œuvre du plongement invariant. Pour le bilaplacien la combinatoire des conditions aux limites donne lieu à de nombreuses situations dont certaines conduisent à une factorisation triviale, mais d'autres à des factorisations instables. Pour l'équation de Stokes la contrainte de divergence nulle pose une difficulté supplémentaire. Enfin nous présentons une première approche de la façon dont on pourrait utiliser ce plongement invariant spatial pour un problème d'évolution considéré sur un intervalle de temps fixé.

La forme cylindrique du domaine pour le cas modèle est assez naturelle dans le cadre du chapitre 4, mais elle parait très restrictive pour l'étude d'un problème aux limites elliptique général. En fait la méthode du plongement invariant nécessite seulement la mise en œuvre d'une famille de sous-domaines du domaine intial limités par une famille de surfaces dépendant d'un paramètre qui va balayer l'ensemble du domaine initial lorsque ce paramètre varie. Ainsi défini le plongement invariant peut conduire à des situations singulières, même avec des surfaces très régulières, comme par exemple un domaine initial réduit à un point. Au chapitre 7, nous considérons d'abord des domaines qui par un changement de coordonnées orthogonales peuvent se ramener à un domaine cylindrique. Si les formules se complexifient, le calcul reste de même nature que pour le cas modèle. Nous étudions ensuite des domaines que nous appelons quasi-cylindres, constitués d'une famille de sections planes dont le bord varie continument. Cette géometrie permet d'aborder une situation nouvelle où le champs de dérivation (ici naturellement orthogonal aux sections planes), n'est pas tangent à la surface latérale du quasi-cylindre. Il en résulte des termes au bord nouveaux dans l'équation de Riccati qui ne sont obtenus ici que formellement. Enfin nous terminons le chapitre sur l'étude d'un domaine limité par un bord intérieur et un bord extérieur de forme régulière mais quelconque ; le plongement invariant est réalisé à l'aide d'une famille de surfaces se déplaçant continument d'un bord vers l'autre. Ces surfaces sont elles-mêmes sans bord. Le calcul proposé est intrinsèque, c'est-à-dire sans référence à un système de coordonnées. Il peut donner lieu à une méthode de discrétisation : en considérant un nombre fini de ces surfaces discrétisées par éléments finis on constitue un maillage adapté à la discrétisation des équations factorisées obtenues par cette méthode. Le calcul est simplifié s'il y a un nombre constant de nœuds sur chaque surface et une correspondance un pour un de ces nœuds entre deux surfaces voisines. Nous évoquons aussi la méthode du « zoom de calcul » où la famille de surfaces est définie par homothétie et qui permet, d'un point de vue de résolution numérique, de concentrer le calcul dans une sous-région d'intérêt du domaine.

Au chapitre 8, nous présentons une décomposition du problème modèle en le produit d'un problème orthogonal et d'un problème de Cauchy du deuxième ordre.

Le chapitre 9 est issu de la thèse d'I. Champagne [CHA 04] qui utilise des résultats de M. Sorine. Nous y montrons comment l'équation de Riccati obtenue pour la factorisation du cas modèle peut, à l'aide d'une transformation homographique, être ramenée à une équation linéaire. Ceci fournit une formule de représentation de la solution générale de l'équation de Riccati connaissant une solution particulière, par exemple la solution stationnaire. Ce point de vue est largement développé dans le livre [ABO 03] en dimension finie. De plus, les singularités de la transformation homographique permettent d'expliquer et de résoudre les difficultés rencontrées précédemment pour définir les conditions initiales de l'équation de Riccati pour certaines conditions aux limites : par exemple pour définir la condition initiale de l'équation donnant l'opérateur Dirichlet-Neumann si la condition aux limites sur le bord correspondant est de Dirichlet.

Ce livre présente donc des idées déjà formulées par R. Bellman et E. Angel mais reprises et développées dans un cadre mathématique développé par J.-L. Lions pour les équations aux dérivées partielles et le contrôle optimal. Son contenu a été partiellement publié dans des journaux. L'exposé basé sur un exemple très simple se veut didactique. Les prérequis portent sur des bases d'analyse fonctionnelle, de théorie hilbertienne des équations aux dérivées partielles telles qu'elles sont enseignées en troisième année de licence ou première année de master de mathématiques (voir par exemple [BRE 99]).

L'une des ambitions de ce livre est de montrer que la méthode de plongement invariant utilisée en contrôle optimal pour des systèmes à dynamique linéaire qui conduit à un *feedback* optimal utilisant la résolution d'une équation de Riccati, la factorisation de Gauss des matrices et la méthode de factorisation des problèmes aux limites présentée ici relèvent de la même méthodologie. Une des retombées de cette approche est de fournir un procédé de calcul pour des opérateurs de type Dirichlet-Neumann à l'aide de la résolution d'une équation de Riccati. Cela peut être utile à la méthode de décomposition de domaines [QUA 99] et pour certains problèmes inverses [BEN 11]. Pour des systèmes non linéaires la recherche d'un *feedback* optimal conduit aux équations de Hamilton-Jacobi-Bellman. Une prolongation naturelle de nos recherches conduira à transposer les mêmes idées pour la factorisation des problèmes aux limites non linéaires (pour une première approche en ce sens voir [JAI 75]).

Nous avons bénéficié d'échanges avec de nombreux collègues. Nous tenons à les en remercier : J.-P. Yvon a été coauteur d'une première étude sur le sujet ; M. Sorine et V. Barbu nous ont fait profiter de leur expérience sur l'équation de Riccati du contrôle et M. Delfour de ses travaux sur la dérivation par rapport à une variation de la frontière du domaine ; N. Zemzemi pour sa collaboration sur le problème inverse en électrocardiographie ; A. Ben Abda et B. Louro ont codirigé des thèses portant sur le sujet. Des doctorants et post-doctorants par leurs travaux sur cette méthode ont permis de faire progresser les connaissances : I. Champagne, M. Soares, N. Belaib, M. d'Orey, F. Jday, K. Sharma, J. Bouyssier et M. Addouche.