

Avant-propos

Ce livre étudie des méthodes pour aborder concrètement (sur un ordinateur) des problèmes inverses. Mais qu'est-ce qu'un problème inverse ? Un problème inverse apparaît à chaque fois que l'on cherche à déterminer les causes ayant produit un effet donné, ou lorsque l'on cherche à mesurer de manière indirecte des paramètres d'un système physique.

L'exemple le plus courant dans la vie quotidienne de beaucoup d'entre nous provient du domaine médical : l'échographie qui permet de savoir si un bébé à naître est en bonne santé passe par la résolution d'un problème inverse. Une sonde, posée sur le ventre de la patiente, émet et reçoit des ultrasons. Ceux-ci sont déviés, et réfléchis, par les tissus du fœtus. La sonde reçoit et interprète ces échos pour renvoyer une *image* des contours de ces tissus. L'image est bien obtenue de manière indirecte. Nous verrons d'autres exemples plus loin dans cet ouvrage.

De manière intuitive, l'observation d'un effet peut ne pas être suffisante pour en déterminer la cause. Si j'entre dans une pièce, et que je constate que la température y est (presque) uniforme, il m'est difficile de savoir quelle était la répartition de température deux heures auparavant. On dit que le problème inverse de déterminer la température dans le passé est « mal posé ». Cette définition s'oppose à la question de déterminer l'évolution future de la température, qui est en un sens que nous préciserons « bien posée ». Comme Monsieur Jourdain, nous avons tellement l'habitude de résoudre des problèmes bien posés que nous le faisons (presque) sans réfléchir.

La résolution de ce type de problème nécessite donc la maîtrise de technique et de méthodes spécifiques. Ce livre en présente certaines, choisies pour leur champ d'application très général. Il se concentre sur un petit nombre de méthodes qui seront utilisées dans la plupart des applications :

- la reformulation d'un problème inverse sous forme de **minimisation d'une fonctionnelle d'erreur quadratique**. La raison de ce choix est principalement pratique : il rend possible les calculs à un coût raisonnable ;
- la **régularisation** des problèmes mal posés, et en particulier la méthode de Tikhonov ;
- l'utilisation de la **décomposition en valeurs singulières** pour analyser un problème mal posé ;
- la **méthode de l'état adjoint** pour calculer le gradient des fonctionnelles à minimiser quand celles-ci ne sont pas quadratiques.

Ces outils vont permettre d'aborder beaucoup (mais pas tous !) de problèmes inverses qui se posent en pratique. Il convient néanmoins de garder à l'esprit deux limitations. D'une part, de nombreux problèmes inverses feront appel à des techniques différentes (nous en mentionnerons quelques-uns). D'autre part, même lorsque les outils présentés sont applicables, ils seront rarement suffisants en eux-mêmes pour aller jusqu'au bout d'une application physique complexe. Il sera le plus souvent nécessaire de compléter ces outils par une analyse fine de la situation particulière, pour en tirer le meilleur parti (redondance ou non des données, variation rapide ou lente des paramètres recherchés, etc.).

Il est usuel, dans ce type d'avant-propos, de justifier l'existence de l'ouvrage présenté ! Il est vrai que la question est légitime, de nombreux ouvrages existent déjà sur le sujet (il suffit de consulter la bibliographie de celui-ci), et je ne prétends à aucune originalité sur le contenu. Toutefois, la plupart des livres existant sont en anglais, et il m'a semblé utile de rassembler des résultats dont certains sont bien connus, et d'autres sont « bien connus de ceux qui les connaissent bien » et de les rendre accessibles à un public francophone.

Ce livre s'adresse à des lecteurs possédant un bagage mathématique, et de calcul scientifique, assez conséquent, équivalent à un master de mathématiques appliquées. Néanmoins, il s'agit d'un ouvrage à visée pratique. Les méthodes qui y sont décrites sont applicables, ont été appliquées, et sont le plus souvent illustrées par des exemples numériques.

Les prérequis pour aborder cet ouvrage sont malheureusement plus nombreux que je ne l'aurais souhaité. C'est une conséquence de ce que l'étude des problèmes inverses fait appel à de nombreux autres domaines des mathématiques. L'algèbre linéaire, tant théorique que numérique, est ici un outil de base, comme l'est une certaine familiarité avec le langage de la théorie de l'intégration. L'analyse fonctionnelle, qui est ce que devient l'algèbre linéaire quand on abandonne la dimension finie, est omniprésente, et j'ai consacré un appendice à des rappels des notions directement utiles dans ce livre. Une partie importante des exemples provient de modèles d'équations aux dérivées partielles. Ici encore, le lecteur bénéficiera d'une

connaissance préalable des méthodes d'analyse (formulations faibles, espaces de Sobolev) et d'analyse numérique (méthode des éléments finis, schémas pour les équations différentielles).

Plan de l'ouvrage

Le [chapitre 1](#) introduit le sujet, donne quelques généralités sur les problèmes inverses, et présente les difficultés que l'on peut rencontrer à partir de deux exemples très simples.

Dans le [chapitre 2](#), nous donnerons plusieurs exemples de problèmes inverses, provenant de plusieurs domaines de la physique. Nous introduirons la notion fondamentale de *problème mal posé*, qui est caractéristique des problèmes inverses.

Au [chapitre 3](#), nous introduirons une source importante de problèmes inverses linéaires : les équations intégrales de première espèce. Après avoir exposé les principales propriétés des opérateurs intégraux, nous expliquerons en quoi ils sont mal posés. Enfin, nous introduirons des méthodes de discrétisation, conduisant à des problèmes de moindres carrés.

L'étude de ces problèmes fait l'objet des deux chapitres suivants. Au [chapitre 4](#), nous étudierons leurs propriétés mathématiques, dans un cadre hilbertien : l'aspect géométrique, et le lien avec les équations normales, ainsi que les questions d'existence et d'unicité des solutions. Nous introduirons également l'outil fondamental, tant pour l'analyse théorique que pour l'approximation numérique, qu'est la *décomposition en valeurs singulières*, tout d'abord pour les matrices, puis pour les opérateurs entre espaces de Hilbert. Des rappels concernant les aspects numériques des problèmes inverses se trouvent dans l'annexe A. Au [chapitre 5](#), nous aborderons l'étude des techniques pour les problèmes mal posés, tout particulièrement la méthode de régularisation de Tikhonov et la troncature spectrale. La méthode de Tikhonov sera d'abord abordée d'un point de vue variationnel, avant de donner un éclairage par la décomposition en valeurs singulières. Nous aborderons la question du choix du paramètre de régularisation, et terminerons par un exemple de régularisation par une méthode itérative.

Dans une deuxième partie, nous aborderons les problèmes non linéaires, essentiellement les problèmes d'estimation de paramètres dans les équations différentielles, et aux dérivées partielles. Au [chapitre 6](#), nous verrons comment poser les problèmes d'identification en termes de minimisation, quelles sont les principales difficultés auxquelles on peut s'attendre, ainsi que des rappels sur les méthodes numériques de base en optimisation. Le [chapitre 7](#) abordera la technique importante de l'état adjoint pour calculer le gradient des fonctionnelles qui interviennent dans les problèmes de moindres carrés. Nous verrons sur plusieurs exemples comment mener à bien ce calcul de façon efficace.

Nous concluons cette deuxième partie par une ouverture sur des sujets qui n'auront pu être évoqués dans ce livre, en donnant quelques pistes bibliographiques.

Nous avons rassemblé des rappels concernant les méthodes numériques d'algèbre linéaire pour les problèmes de moindres carrés, des rappels sur l'optimisation, ainsi que quelques résultats d'analyse fonctionnelle, et des compléments sur les opérateurs linéaires dans des annexes.

Remerciements

Mes remerciements s'adressent tout d'abord au professeur Limnios, qui m'a proposé d'écrire ce livre, à partir d'une première version de notes de cours que j'avais publiées sur l'internet. Je lui suis reconnaissant de m'avoir donné l'occasion de publier ce cours en lui procurant plus de visibilité.

Le contenu de ce livre doit beaucoup, et c'est là un euphémisme, à Guy Chavent. Ce livre a connu sa première incarnation en tant que support pour un cours qu'avait enseigné G. Chavent, et pour lequel il m'a fait suffisamment confiance pour me laisser l'enseigner après son départ. Guy a d'abord été mon directeur de thèse, et fut le premier responsable du projet Inria au sein duquel j'ai fait tout ma carrière. Il a été, et reste, une source d'inspiration quand à la manière d'aborder un problème scientifique.

J'ai eu la chance de travailler dans l'environnement particulièrement stimulant de l'Inria, et d'y côtoyer des collègues qui joignent de grandes qualités scientifiques à des personnalités attachantes. Je pense tout particulièrement à Jérôme Jaffré, et à Jean Roberts. Une mention particulière pour mes collègues de l'équipe Serena : Hend Benameur, Nathalie Bonte, François Clément, Caroline Japhet, Vincent Martin, Martin Vohralik et Pierre Weis. Merci pour votre amitié, et merci de rendre notre environnement de travail agréable et intellectuellement stimulant.

Je remercie les collègues qui m'ont indiqué des erreurs dans les versions provisoires du livre, les étudiantes et les étudiants du Pôle universitaire Léonard de Vinci, de Mines-ParisTech et de l'Ecole nationale d'Ingénieurs de Tunis pour leur écoute et leurs questions, ainsi que le personnel des éditions ISTE pour son aide à la réalisation de l'ouvrage.